

ARCHIMÈDE

DES SPIRALES

DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES

L'ARÈNAIRE

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE



COLLECTION DES UNIVERSITÉS DE FRANCE
Publiée sous le patronage de l'ASSOCIATION GUILLAUME BUDÉ

ARCHIMÈDE

TOME II

**DES SPIRALES
DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES
L'ARÉNAIRE
LA QUADRATURE DE LA PARABOLE**

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT

PAR

CHARLES MUGLER

Professeur honoraire à l'Université de Nice



PARIS

SOCIÉTÉ D'ÉDITION « **LES BELLES LETTRES** »
95, BOULEVARD RASPAIL

—
1971

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

La loi du 11 mars n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration « toute représentation ou reproduction intégrale, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droits ou ayants-cause, est illicite » (Alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

AVANT-PROPOS

Pour l'établissement du texte et la révision de ce tome second mes collègues J. Irigoïn et E. Delebecque m'ont de nouveau prêté leur concours fidèle. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je tiens aussi à assurer de ma gratitude M. E. Stamatis, dont les savants travaux sur Archimède m'ont été d'un grand secours pour ce tome II comme pour le précédent.

Ch. M.

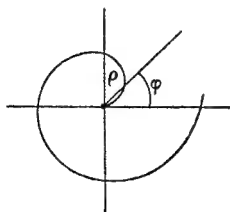
SIGLA

- A codex Vallae deperditus a quo fluxerunt DEGH.
B Otlobonianus lat. 1850, autographus G. de Moerbeke, a. 1269.
C Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, saec. X.
D Laurentianus XXVIII 4, saec. XV.
E Marcianus gr. 305, saec. XV.
G Parisinus gr. 2360, saec. XVI.
H Parisinus gr. 2361, a. 1544.
P Parisinus gr. 2448, saec. XIV.
G Guelferbytanus Gudianus gr. 77.

- Basil. Editio princeps, Basileae, 1544.
Riualtus Archimedis opera, Parisiis, 1615.
Barrowius Opera Archimedis, Londini, 1675.
Wallis Archimedis arenarius et dimensio circuli, Oxonii, 1678.
Torellius Archimedis opera, Oxonii, 1792.
Nizzius Nizze, Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt, Stralsund, 1824.
Heiberg Archimedis opera omnia, editio altera, Lipsiae, 1910-1915.

NOTICE

Dans ce traité Archimède résout un certain nombre de problèmes relatifs à une courbe de son invention, la « spirale d'Archimède », qu'il définit d'une manière cinématique comme décrite par un point qui se déplace avec une vitesse constante sur une droite pendant que cette droite tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'un de ses points. Archimède démontre d'abord



une suite de onze théorèmes auxiliaires relatifs au déplacement uniforme d'un point sur une droite, à la longueur des segments interceptés par des cercles et leurs tangentes sur des sécantes données et à la somme de certaines progressions formées par les carrés de segments de droites se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur. Ces propositions, 1-11, interviennent dans l'analyse des propriétés de la spirale à laquelle sont consacrées les propositions 12-28. Une série de définitions nous fait connaître la génération de la spirale et fixe la terminologie relative au point initial, appelé « origine » de la spirale, à la position initiale de la droite qui tourne, aux segments successifs parcourus sur la

droite tournante par le point mobile pendant les révolutions successives, aux aires limitées par les spires successives et les segments correspondants, et aux cercles concentriques décrits autour de l'origine de la spirale avec des rayons successivement égaux au premier segment parcouru par le point mobile et aux multiples entiers de ce segment. Les propositions 12-17 démontrent que les rayons vecteurs comprenant entre eux des angles égaux se dépassent l'un l'autre de longueurs égales ; qu'une tangente à la spirale ne la touche qu'en un seul point ; que deux rayons vecteurs de la première spire ont entre eux le même rapport que les arcs du premier cercle compris entre la droite initiale et les points d'intersection de ce cercle avec ces rayons vecteurs ; qu'une relation analogue lie des rayons vecteurs de la seconde spire aux arcs qu'ils déterminent sur le second cercle ; que les angles que fait la tangente à une spirale avec le rayon vecteur du point de contact sont inégaux, l'angle « en avant », c'est-à-dire l'angle situé dans la région encore à balayer par le rayon vecteur, étant obtus, l'angle « en arrière », c'est-à-dire situé dans la région déjà balayée, étant aigu. Dans les propositions 18-20, Archimède se sert des propriétés de la spirale pour la rectification d'arcs de cercle.

La fin du traité, les propositions 21-28, est consacrée à une des réussites les plus extraordinaires de son génie, à la quadrature de la spirale. Ces pages font apparaître d'une façon particulièrement nette à la fois les difficultés que rencontrait au III^e siècle avant J.-C. l'évaluation d'une aire limitée par des lignes autres que la droite et la circonférence, et les ressources d'imagination par lesquelles Archimède triompha de ces difficultés. Transposée en algorithme moderne, la quadrature de la spirale ne pose, en effet, aucun problème. L'équation, en coordonnées polaires, d'une spirale, ayant comme point initial l'origine des coordonnées et comme position initiale de la droite qui tourne l'axe des abscisses, étant

$$(1) \rho = \frac{a}{2\pi} \varphi$$

où a désigne la longueur du segment parcouru par le point mobile sur la droite pendant une révolution, l'aire de la première spire est égale à l'intégrale définie

$$(2) A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi$$

D'où

$$(3) A = \frac{a^2}{8\pi^2} \frac{\varphi^3}{3} \bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Mais cette opération, qui nous apprend en un clin d'œil que l'aire A de la première spire de la spirale d'Archimède est équivalente au tiers du premier cercle, nous fait oublier les raisonnements géométriques qui sont à la base de l'application du calcul intégral à l'évaluation des aires. La sommation des aires dans ce procédé porte, une fois pour toutes, sur des surfaces différentielles cernées par des figures formées de lignes droites, quelle que soit la ligne courbe limitant l'aire à évaluer. Le géomètre moderne ayant à résoudre un problème de « quadrature » de ce genre ne s'occupe plus de la décomposition de l'aire à mesurer en tranches différentielles ni de l'inscription et de la circonscription de ces tranches. Il s'en remet au fonctionnement de l'algorithme institué par les inventeurs du calcul différentiel et intégral, qui s'applique indifféremment à un grand nombre de courbes dont on connaît l'équation. Il n'en est pas de même chez les anciens. Chacun de leurs problèmes d'intégration était un cas d'espèce dont la solution exigeait des méthodes particulières qui ne prêtaient pas à une généralisation. Dans l'aire du segment de parabole dont l'évaluation est une vraie quadrature, Archimède fait intervenir, comme

nous le verrons, des suites décroissantes de figures rectilignes, de triangles dans l'occurrence. Pour l'aire de la spirale, en revanche, dont l'évaluation n'est qu'une quadrature conditionnée aboutissant entre autres à l'équivalence entre la première spire et le tiers du premier cercle, il a recours à des secteurs circulaires inscrits et circonscrits aux secteurs de la spirale et tels que leurs rayons forment des progressions arithmétiques (cf. les propositions 21, 24, 27 du texte). Si Archimède a choisi ce moyen, c'est sans doute parce que par intuition il avait prévu l'existence d'un rapport simple entre les aires de la spirale et du cercle.

Le texte du traité *Des Spirales* est établi d'après les manuscrits B, D, E, G, H et les parties conservées de C.

DES SPIRALES

Archimède à Dosithée, joie !

De la plupart des théorèmes, dont j'avais envoyé les énoncés à Conon et dont tu m'engages toujours à rédiger les démonstrations, tu possèdes les démonstrations écrites dans les livres qu'Héraclide t'a remis ; mais j'ai développé certaines de ces démonstrations aussi dans le présent livre, et je te les envoie. Ne t'étonne pas que j'aie beaucoup tardé à publier les démonstrations de ces propositions ; la cause en est que j'ai voulu les soumettre d'abord à des hommes qui, pratiquant les mathématiques, préfèrent se consacrer eux-mêmes à leur recherche. En effet, combien n'y a-t-il pas de théorèmes de géométrie qui apparaissent d'un accès difficile au début, et qui ont trouvé leur achèvement avec le temps ? Conon est décédé avant d'avoir eu le temps nécessaire pour l'étude de ces questions : sinon il en aurait rendu évidentes les solutions par la découverte de toutes ces propriétés et de beaucoup d'autres et il aurait fait progresser la géométrie ; car nous savons qu'il avait une intelligence peu commune des mathématiques et qu'il déployait une activité hors ligne. Mais, bien que de nombreuses années se soient écoulées depuis la mort de Conon, je constate qu'aucun géomètre ne s'est attaqué à un de ces problèmes. Aussi veux-je les proposer ici chacun à part ; car il se trouve que deux de ces problèmes, que moi-même je n'étais pas encore arrivé à mener à bonne fin, ont été ajoutés à leur liste ; de cette façon ceux qui prétendent les trouver tous, sans en produire aucune

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

Ἀρχιμήδης Δοσιθέω χαίρειν

- Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν
ἀεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν
πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις
5 γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ
γράψας ἐπιστέλλω τοι. Μὴ θαυμάσης δὲ εἰ πλείονα
χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομες τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν·
συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι διὰ τὸ βούλεσθαι με
πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευο-
10 μένοις καὶ μαστεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. Πόσα γὰρ
τῶν ἐν γεωμετρίας θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχῇ
φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι; Κόνων
μὲν οὖν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν ἐς τὰν μάστευσιν αὐτῶν χρόνον
μετάλλαξεν τὸν βίον· ἥ δὴλα ἐποίησέν κα ταῦτα πάντα
15 εὐρὼν καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρὼν καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον
προάγαγεν γεωμετρίαν· ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν
αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα καὶ
φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν. Μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος
τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγεννημένων οὐδ' ὑφ' ἐνὸς
20 οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. Βούλο-
μαι δὲ καθ' ἕνα καστον αὐτῶν προενέγκασθαι· καὶ γὰρ
συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἑμαυτῷ μήπω πεπερασμένων διὰ

10 πόσα Barrowius : ποῖα codd. || 13 οὖν add. Heiberg || 14
ἥ δὴλα Heiberg praeunte Maduigio : ἄδηλα DEGH et obs-
cura B || κα Heiberg : καὶ codd. || 22 ἑμαυτῷ Heiberg : ἐν
αὐτῷ DEGH inter ipsa B || μήπω πεπερασμένων διὰ Heiberg :
μὴ κεχωρασμένα DEH non separata B μὴ κεχωρισμένα G.

démonstration, seront confondus de se faire fort de trouver des solutions impossibles. Je crois donc à propos de t'expliquer la nature de ces problèmes en distinguant entre ceux dont je t'ai déjà mandé par écrit les démonstrations et ceux dont je donne la démonstration dans le présent livre.

Voici quel était le premier problème : étant donnée une sphère, trouver une aire plane équivalente à la surface de la sphère¹. La solution de ce problème apparut pour la première fois lors de l'édition du livre sur la sphère ; une fois démontré, en effet, que l'aire de toute sphère est quadruple de l'aire d'un grand cercle² de cette sphère, il devient évident qu'il est possible de trouver une aire plane équivalente à la surface de la sphère.

Deuxième problème : étant donné un cône ou un cylindre, trouver une sphère équivalente à ce cône ou à ce cylindre³.

Troisième problème : couper une sphère donnée par un plan de manière que les volumes de ses segments aient entre eux un rapport donné⁴.

Quatrième problème : couper une sphère donnée par un plan de manière que les aires de ses segments aient entre elles un rapport donné⁵.

Cinquième problème : rendre un segment de sphère donné (sc. par le volume) semblable à un segment de sphère donné (sc. par les proportions)⁶.

Sixième problème : étant donnés deux segments, soit d'une même sphère ou de sphères différentes, trouver un segment de sphère semblable à l'un des segments et ayant une aire équivalente à l'aire de l'autre segment⁷.

Septième problème : découper d'une sphère donnée un segment par un plan de manière qu'il ait au cône de même base et de même hauteur un rapport donné supérieur à celui de trois à deux⁸.

1. Cf. *De le sphère et du cylindre*, II, fin de la lettre à Dosithée.

2. Cf. *ibid.*, I, 33.

3-8. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

- τέλους ποτιτεθῆμεν, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὐρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες ἐλέγχωνται ποθωμολογηκότες εὐρίσκειν τὰ ἀδύνατα. Ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις
- 5 ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζομες, δοκιμάζομες ἐμφανίξαι τοι. Πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν ὁ σφαῖρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὐρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαῖρας. Ὁ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερόν ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν βιβλίου ὁ δειχθέντος
- 10 γὰρ ὅτι πάσας σφαῖρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ δῆλον ὡς δυνατόν ἐστὶ χωρίον ἐπίπεδον εὐρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαῖρας. Δεύτερον δὲ ὁ κῶνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὐρεῖν ἴσαν τῷ κῶνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. Τρίτον δὲ τὴν δοθείσαν
- 15 σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτὰς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. Τέταρτον δὲ τὴν δοθείσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. Πέμπτον δὲ τὸ δοθέν τμήμα σφαῖρας τῷ δοθέντι τμήματι
- 20 σφαῖρας ὁμοιωσαι. Ἑκτον δὲ δύο δοθέντων τμημάτων σφαῖρας εἴτε τὰς αὐτὰς εἴτε ἄλλας εὐρεῖν τι τμήμα σφαῖρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὁμοῖον τῷ ἐτέρῳ τῶν τμημάτων, τὸ δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἔξει τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐτέρου τμήματος. Ἑβδομον ὁ ἀπὸ τῆς δοθείσας σφαῖρας
- 25 τμήμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμήμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ δύο. Τούτων μὲν οὖν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς

1 ποτιτεθῆμεν Heiberg : δὲ ποτέσσομεν DEGH finem autem attingemus B || 3 ποθωμολογηκότες Heiberg : ἀποθωμολογηκότες DEGH tamquam confitentes B || 5 κομίζομες Torellius : κομίζοντες codd. || 6 δοκιμάζομες Heiberg : δοκιμάζοντες codd || 9 τὴν σφαῖραν Heiberg : τὴν σφαῖραν BDEH τῆς σφαῖρας G || 27 μείζονα Nizzius : μὴ μείζονα codd.

De tous ces problèmes cités Héraclide t'a remis les démonstrations ; quant à ceux qui étaient placés séparément à leur suite, ils sont faux. Les voici : si une sphère est coupée par un plan en deux parties inégales, le rapport du plus grand segment au plus petit est égal au carré du rapport de la plus grande aire à la plus petite. Que cette proposition est fausse, cela est évident en vertu des théorèmes qui t'ont été envoyés antérieurement, parmi lesquels figure en particulier le suivant : si une sphère est coupée en deux parties inégales par un plan perpendiculaire à un diamètre de la sphère, le plus grand segment de l'aire aura au plus petit segment le même rapport qu'a le plus grand segment du diamètre au plus petit, et le volume du plus grand segment de la sphère aura au volume du plus petit un rapport inférieur au carré du rapport entre la plus grande aire et la plus petite, mais supérieur à ce rapport multiplié une fois et demie par lui-même¹. Tout aussi faux était le problème particulier rangé dernier, à savoir : si un diamètre d'une sphère est divisé de manière que le carré sur le plus grand de ses segments soit égal au triple du carré sur le plus petit segment, et si un plan mené par le point (sc. de division) perpendiculairement au diamètre coupe la sphère, la figure constituée par le plus grand segment de la sphère est de tous les segments ayant la même aire celui qui a le plus grand volume. L'inexactitude de cette proposition devient évidente à la lumière des théorèmes que je t'avais envoyés précédemment, où il a été démontré en effet que c'est l'hémisphère qui, de tous les segments de sphère de même surface, a le plus grand volume².

Après ces problèmes, les problèmes relatifs au cône que voici : si une parabole tourne pendant que son diamètre reste fixe, de telle manière que ce diamètre devient axe, la figure décrite par la parabole s'appellera

1. Cf. *ibid.*, II, 8.

2. Cf. *ibid.*, II, 9.

ἀποδείξιας Ἡρακλείδας ἐκόμιξεν · τὸ δὲ μετὰ ταῦτα
κεχωρισμένον ψεῦδος ἦν. Ἔστι δέ · εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ
τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μείζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλα-
σίαον λόγον ἔξει ἢ ἂ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα.

5 Ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων
φανερὸν ἐστι · κεχώριται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε · εἴ κα
σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ
τινὶ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὰς μὲν ἐπιφανείας τὸ μείζον τμᾶμα
ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ

10 μείζον τὰς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον, τὸ δὲ μείζον
τμᾶμα τὰς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ
διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἂ μείζων ἐπιφάνεια
ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἦν δὲ καὶ τὸ
ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι,

15 εἴ κα σφαίρας τινὸς ἂ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ
τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν
τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ
διὰ τοῦ σαμείου ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ
τέμνη τὰν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἶδει σχῆμα, οἶόν

20 ἐστὶ τὸ μείζον τὰς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν
ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν.

Ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι δῆλον διὰ τῶν προαπεσταλμένων
θεωρημάτων · δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν
ἐστὶ τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας

25 τμαμάτων. Μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα
ἐστὶ τάδε · εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τὰς
διαμέτρου περιενεχθῇ ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον,
τὸ περιγραφέν σχῆμα ὑπὸ τὰς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου
τομᾶς κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος

8 τὰς μὲν ἐπιφανείας add. Heiberg || 10 δὲ Heiberg : γὰρ codd.
|| 11 ἔλασσον B : om. DEGH || 18 ἐπίπεδον Heiberg : τὸ ἐπί-
πεδον DEGH.

conoïde ; si un plan est tangent à la figure conoïde, et qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe un segment du conoïde, on appellera base du segment découpé le plan sécant et sommet le point de contact de l'autre plan (sc. du plan tangent) avec le segment¹. Dès lors, si la figure en question est coupée par un plan perpendiculaire à l'axe, il est évident que l'intersection sera un cercle ; ce qui exige une démonstration, c'est cette autre propriété que le volume du segment découpé sera égal aux trois demis du volume du cône ayant même base et même hauteur². Et si on découpe du conoïde deux segments par des plans menés de n'importe quelle manière, il est évident que les intersections seront des ellipses sauf quand les plans sécants sont perpendiculaires à l'axe³ ; ce qu'il faut démontrer, en revanche, c'est que le rapport entre les deux segments est égal au rapport entre les carrés des segments de droite menés, parallèlement à l'axe, de leurs sommets aux plans sécants⁴ ; de ces dernières propositions les démonstrations ne te sont pas encore envoyées.

A la suite de ces questions, des problèmes relatifs à la spirale qui, constituant comme un autre genre de problèmes, n'ont rien de commun avec ceux que nous venons de rappeler et dont je t'envoie les démonstrations, rédigées dans ce livre. Les voici : lorsqu'une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale. Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du

1. Cf. *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, Lettre à Dosithée, commencement.

2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 21 et Lettre à Dosithée, Archim. I, p. 103.

3. Cf. *ibid.*, 12.

4. Cf. *ibid.*, 24 et Lettre à Dosithée, Archim. I, p. 103.

- σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύη, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνη τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμᾶματος βάσις μὲν καλεῖσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον,
- 5 καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. Εἰ δὴ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἂ τομαὶ κύκλος ἐσσεῖται δῆλον, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον,
- 10 δεῖξαι δεῖ. Καὶ εἴ καὶ τοῦ κωνοειδέος δύο τμᾶματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὅπως οὖν ἀγμένοις, ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ δῆλον, εἴ καὶ τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμᾶματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἐξοῦντι τὸν λόγον,
- 15 ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας αἱ ἀπὸ τὰν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμεῖναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ· τούτων δ' αἱ ἀποδείξεις οὕτω τοι ἀποστέλλονται. Μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἑλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα· ἐντὶ δ' ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων
- 20 οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις· ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμές τοι. Ἔστιν δὲ τάδε· εἴ καὶ εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἐτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένη
- 25 φέρηται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἑλικά γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου

6 καὶ Heiberg : καὶ BDEGH || 12 ὀξυγωνίων κώνων BDEG : ὀξυγωνίου κώνου H Nizzius || 15 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH || 16 ἐπὶ add. Heiberg || τὰ alt. add. Heiberg || 17 οὕτω B : οὕτω DEGH || 18 ἑλικος G : ἑλικας BDEH.

cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite¹. Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle². Et si la droite qui tourne avec le point qui se déplace sur elle fait plusieurs tours et revient à sa position initiale, je dis que l'aire ajoutée par la spirale dans sa troisième révolution est double de celle qui ■ été ajoutée dans la deuxième révolution, que l'aire ajoutée dans la quatrième révolution est triple, celle ajoutée dans la cinquième quadruple, et que, ainsi de suite, les aires ajoutées dans les révolutions ultérieures seront des multiples, dans l'ordre des nombres, de l'aire ajoutée dans la seconde révolution, alors que l'aire enveloppée dans la première révolution est la sixième partie de l'aire ajoutée dans la deuxième révolution. Si, enfin, on prend sur la spirale décrite pendant une révolution deux points qu'on joint par des droites à l'extrémité fixe de la droite qui tourne, si autour de ce point fixe comme centre et avec des rayons égaux aux segments

1. Cf. *Des spirales*, 24.

2. Cf. prop. 18.

- τοῦ γραφέντος κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σαμείῳ, διαστήματι δὲ τῇ εὐθείᾳ τῇ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τῇ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. Καὶ εἴ κα τᾶς ἑλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρασ τᾶς ἑλικος τὸ ἔσχατον γένόμενον,
- 5 ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τῇ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμῇ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος αὐτᾶς ὥστε ἐμπεσεῖν τῇ ἐπιψαυούσᾳ, φανὶ τὰν ποταχθείσαν εὐθειᾶν ἴσαν εἶμεν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. Καὶ εἴ κα ἃ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σαμείον τὸ φερόμενον
- 10 κατ' αὐτᾶς πλείονας περιφορὰς περιενεχθέντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασαν, φανὶ τοῦ χωρίου τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἑλικος τὸ μὲν ἐν τῇ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖσθαι, τὸ δὲ ἐν τῇ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τῇ πέμπτᾳ
- 15 τετραπλάσιον, καὶ αἰ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος, τὸ δὲ ἐν τῇ πρώτᾳ περιφορᾷ περιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ
- 20 ποτιλαφθέντος χωρίου. Καὶ εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεία λαφθέντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρασ τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότη σαμείῳ, διαστη-
- 25 μάτεσσι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρασ τᾶς εὐθείας, καὶ ἃ ἐλάσσων τὰν ἐπιζευχθείσαν ἐπεκβληθῇ, φανὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ ἑλικί μεταξὺ τὰν εὐθειᾶν ἐούσας καὶ τᾶς ἑλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς

6-7 πέρατος αὐτᾶς Torellius : περὶ τὸ αὐτὸ codd. || 18 περιλαφθὲν Heiberg : ποτιλαφθὲν DEGH || 19 τοῦ G : τῇ DEH || 20 ἑλικος G : ἑλικας DEH || 24 γραφέωντι Heiberg : γεγραφέωντι codd. || 28 τῇ add. Heiberg.

de droite joignant le point fixe (sc. aux deux points pris sur la spirale) on décrit deux cercles et qu'on prolonge le plus petit des segments de jonction, je dis que le rapport de l'aire comprise entre l'arc du plus grand cercle situé entre les droites du côté de la spirale, la spirale elle-même et la droite prolongée¹, d'une part, à l'aire, d'autre part, comprise entre la circonférence du plus petit cercle, la même spirale et la droite joignant les extrémités de ces lignes courbes, est égal au rapport entre la somme du rayon du plus petit cercle et les deux tiers de la différence entre le rayon du plus grand cercle et le rayon du plus petit, d'une part, et la somme, d'autre part, du rayon du plus petit cercle et du tiers de la dite différence².

De ces théorèmes, donc, ainsi que d'autres théorèmes concernant la spirale, les démonstrations sont rédigées dans ce livre ; elles y sont précédées, comme dans les autres traités de géométrie, des propositions utiles pour la démonstration. Parmi ces propositions je range aussi un postulat énoncé déjà dans les livres publiés précédemment³, à savoir qu'il soit possible que la différence, dont la plus grande grandeur dépasse la plus petite parmi les lignes inégales et les aires inégales, ajoutée à elle-même (sc. un nombre suffisant de fois) dépasse toute grandeur donnée parmi celles qui sont comparables entre elles.

1.

Si un point se déplace d'un mouvement uniforme sur une certaine ligne et qu'on prend sur cette ligne deux segments, les segments pris sont entre eux dans le même rapport que les temps mis par le point à les parcourir.

Qu'un point se déplace, en effet, d'un mouvement uniforme sur la ligne AB ; prenons sur elle deux segments $\Gamma\Delta$ et ΔE ; soit ZH le temps pendant lequel le point

1-3. Cf. les notes compl.

- ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἑλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν τοῦτον ἔξειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος
- 5 κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ἧ ὑπερέχει ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἐνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. Τούτων δὴ μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἑλικος
- 10 αἱ ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται, πρόκεινται δέ, ὥς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων, τὰ χρεῖαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτῶν. Λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμμα τόδε· τὰν ἀνισὰν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν
- 15 ὑπεροχάν, ἧ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτῇ συντιθεμένην δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

α'.

- Εἴ κα κατὰ τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σαμεῖον ἰσοταχέως
- 20 αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτῇ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας ὄνπερ οἱ χρόνοι, ἐν οἷς τὸ σαμεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη.

- Ἐννεχθῶ γάρ τι σαμεῖον κατὰ τᾶς AB γραμμᾶς
- 25 ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτῇ δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω δὲ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὴν τὸ

4 ἔξειν Heiberg : ἔξει codd. || 5 ἧ G : ἧς DEH || 6 μείζονος... κέντρου τοῦ || : om. DEGH || 8 ἐλάσσονος DEGH : maioris B || 13-14 λήμμα τόδε Heiberg : λήματα δὲ D λήματα τάδε BEGH λημμάτων τόδε Nizsius || 14 ἀνισὰν BG : ἰσὰν DEH || 15-16 αὐτὰν ἑαυτῇ Heiberg : αὐτᾶ DEGH ipsum B || 24 ἐννεχθῶ Heiberg : ἡνέχθω DEGH.

a parcouru le segment $\Gamma\Delta$, et $H\Theta$ le temps pendant lequel il a parcouru ΔE . Il faut montrer que le rapport du segment $\Gamma\Delta$ au segment ΔE est égal au rapport du temps ZH au temps $H\Theta$.

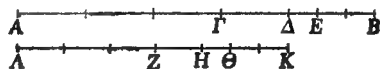


Fig. 1

Composons à cette fin les lignes $A\Delta$, ΔB , de quelque manière que ce soit, au moyen des segments $\Gamma\Delta$ et ΔE , mais de façon que $A\Delta$ excède ΔB ; que le temps ZH soit contenu autant de fois dans le temps ΛH que le segment $\Gamma\Delta$ est contenu de fois dans le segment $A\Delta$, et que le temps ΘH soit contenu dans le temps KH autant de fois que le segment ΔE est contenu de fois dans le segment ΔB . Du moment, dès lors, qu'on a supposé que le point se déplace d'un mouvement uniforme sur la ligne AB , il évident qu'il met autant de temps à parcourir les segments égaux au segment $\Gamma\Delta$ qu'il met à parcourir $\Gamma\Delta$; il est donc manifeste que le point parcourt aussi la ligne composée $A\Delta$ en un temps égal au temps ΛH , puisque le segment $\Gamma\Delta$ est contenu autant de fois dans la ligne $A\Delta$ que le temps ZH est contenu de fois dans le temps ΛH . Pour les mêmes raisons donc le point parcourt aussi la ligne $B\Delta$ en un temps égal au temps KH . Or la ligne $A\Delta$ étant supérieure à la ligne $B\Delta$, il est évident que le point met plus de temps à parcourir la ligne ΔA qu'il n'en met à parcourir la ligne $B\Delta$; il s'ensuit que le temps ΛH est supérieur au temps KH . On montrera de la même manière que, si on compose au moyen des temps ZH et $H\Theta$ des temps de quelque manière que ce soit, mais de façon que ces temps se dépassent l'un l'autre, des lignes composées au moyen des segments $\Gamma\Delta$ et ΔE de la même manière que les temps, ce sera

σαμείον διεπορεύθη, ὁ ΖΗ, ἐν ᾧ δὲ τὰν ΔΕ, ὁ ΗΘ. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἃ ΓΔ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν ΗΘ.

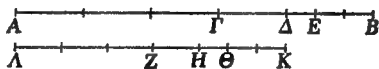


Fig. 1

- Συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τὰν ΓΔ, ΔΕ γραμμῶν αἱ ΑΔ, ΔΒ
 5 γραμμαὶ καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερέχειν τὰν ΑΔ τὰς ΔΒ, καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἃ ΓΔ γραμμὰ ἐν τῇ ΑΔ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ἐν τῷ χρόνῳ τῷ ΛΗ, ὁσάκις δὲ σύγκειται ἃ ΔΕ γραμμὰ ἐν τῇ ΔΒ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ ΘΗ χρόνος ἐν τῷ ΚΗ χρόνῳ.
 10 Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σαμείον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τὰς ΑΒ γραμμῶς, δηλὸν ὥς, ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν ΓΔ ἐνήνκεται, ἐν τοσοῦτῳ καὶ ἐκάσταν ἐνήνκεται τὰν ἰσᾶν τῇ ΓΔ· φανερόν οὖν ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν ΑΔ γραμμάν ἐν τοσοῦτῳ χρόνῳ ἐνήνκεται, ὅσος ἐστὶν ὁ
 15 ΛΗ χρόνος, ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἃ τε ΓΔ γραμμὰ ἐν τῇ ΑΔ γραμμῇ καὶ ὁ ΖΗ χρόνος ἐν τῷ ΛΗ χρόνῳ. Διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν ΒΔ γραμμάν ἐν τοσοῦτῳ χρόνῳ τὸ σαμείον ἐνήνκεται, ὅσος ἐστὶν ὁ ΚΗ χρόνος. Ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἃ ΑΔ γραμμὰ τὰς ΒΔ, δηλὸν ὅτι ἐν
 20 πλείονι χρόνῳ τὸ σαμείον τὰν ΔΑ διαπορεύεται γραμμάν ἢ τὰν ΒΔ· ὥστε ὁ χρόνος ὁ ΛΗ μείζων ἐστὶ τοῦ ΚΗ χρόνου. Ὅμοιως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἓκ τῶν χρόνων τῶν ΖΗ, ΗΘ συντεθέντι χρόνοι καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν, ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἐτέρου, ὅτι καὶ τὰν ἐκ
 25 τὰν γραμμῶν τὰν ΓΔ, ΔΕ κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντε-

celle qui correspond au temps excédant l'autre temps qui excédera l'autre ligne. Il est donc évident que le rapport de la ligne $\Gamma\Delta$ à la ligne ΔE est égal au rapport¹ du temps ZH au temps $H\Theta$.

2.

Si deux points se déplacent, chacun d'un mouvement uniforme et chacun sur une ligne à lui, et si sur chacune de ces lignes on prend deux segments, dont les premiers et les seconds soient parcourus par les points dans des temps égaux, les segments ainsi pris ont entre eux le même rapport.

Soit un point se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la ligne AB , et un autre point se déplaçant sur la ligne $K\Lambda$; prenons sur AB deux segments de ligne $\Gamma\Delta$ et ΔE , et sur $K\Lambda$ les segments ZH et $H\Theta$; que le point se déplaçant sur la ligne AB parcoure le segment $\Gamma\Delta$ dans le même temps dans lequel le point se déplaçant sur $K\Lambda$ parcourt le segment ZH , et que, de même, le (sc. premier) point parcoure ΔE dans le même temps dans lequel l'autre point parcourt $H\Theta$. Il faut montrer que le rapport de $\Gamma\Delta$ à ΔE est égal au rapport de ZH à $H\Theta$.

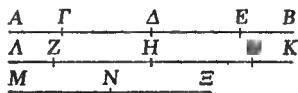


Fig. 2

Soit MN le temps mis par le point à parcourir le segment $\Gamma\Delta$; pendant ce temps, donc, l'autre point parcourt ZH . Soit encore $N\Xi$ le temps dans lequel

1. Cf. Eucl. V, déf. 5.

θειςάν ὑπερέξει ἃ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ ·
 δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἃ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ,
 ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ΗΘ.

β'.

- 5 Εἴ κα δύο σαμείων ἐκατέρου κατὰ τινος γραμμᾶς
 ἐνεχθέντος μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου
 λαφθένῳτι ἐν ἐκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαί, ἂν
 αἱ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διανυέσθων
 καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας
 10 αἱ λαφθείσαι γραμμαί.

- Ἔστω κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον
 ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ καὶ ἄλλο κατὰ τᾶς ΚΛ, λελάφθωσαν
 δὲ ἐν τῇ ΑΒ δύο αἱ ΓΔ, ΔΕ γραμμαί, καὶ ἐν τῇ ΚΛ αἱ
 ΖΗ, ΗΘ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς
 15 ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν ΓΔ γραμμὰν διαπορευέσθω,
 ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον κατὰ τᾶς ΚΛ ἐνηνεγμένον τὰν ΖΗ,
 ὁμοίως δὲ καὶ τὰν ΔΕ γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω
 τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ΗΘ. Δεικτέον ὅτι τὸν
 αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἃ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.

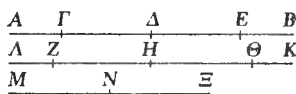


Fig. 2

- 20 Ἔστω δὴ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὰν διεπορεύετο
 τὸ σαμεῖον, ὁ ΜΝ · ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον
 σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΖΗ. Πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν

6 αὐτοῦ G : αὐτῷ DEH ipsum B || 7 ἂν add. Heiberg || 13
 τᾶ pr. G : τῷ DEH || 15 ἐνηνεγμένον Heiberg : ἡνεγμένον DEGH
 || 22 δὴ BCDEGH : δὲ Torellius.

le point parcourt ΔE ; pendant ce temps, l'autre point parcourt le segment $H\Theta$; il s'ensuit que le rapport entre les segments $\Gamma\Delta$ et ΔE est égal au rapport entre les temps MN et $N\Xi$ et que les segments ZH et $H\Theta$ ont entre eux le même rapport¹ que les temps MN et $N\Xi$. Il est donc évident que le rapport entre les segments $\Gamma\Delta$ et ΔE est égal au rapport entre les segments ZH et $H\Theta$.

3.

Des cercles étant donnés en quelque nombre que ce soit, il est possible de prendre un segment de droite supérieur à la somme des circonférences de ces cercles.

Un polygone étant, en effet, circonscrit à chacun des cercles, il est évident que le segment de droite qui est la somme des périmètres de tous les polygones sera supérieur à la somme de toutes les circonférences des cercles².

4.

Deux lignes inégales étant données, un segment de droite et une circonférence de cercle, il est possible de prendre un segment de droite inférieur à la plus grande et supérieur à la plus petite des lignes données.

L'excédent, en effet, de la plus grande ligne sur la plus petite, ajouté un nombre suffisant de fois à lui-même³, dépassera la droite, de façon que si nous divisons le segment de droite en un même nombre de parties, le segment partiel sera inférieur à l'excédent. Si maintenant la circonférence de cercle est plus grande que le segment de droite, il suffit d'ajouter un segment partiel au segment de droite pour que, de toute évidence, la somme soit supérieure à la plus petite des lignes données et inférieure à la plus grande ; mais si la circon-

1. Cf. prop. 1.

2. Cf. *De la sphère et du cylindre*, I, 1.

3. Cf. le postulat énoncé plus haut, à la fin de la lettre à Dosithée.

ΔΕ γραμμὰν διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ΝΞ χρόνος · ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΗΘ · τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἐξοῦντι ἃ τε ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμὰν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ, καὶ ἃ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ τὸν ΝΞ. Δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἃ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἃ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.

γ'.

Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει δυνατόν ἐστιν εὐθείαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τὰν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

Περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου δῆλον ὥς ἃ ἐκ πασᾶν συγκειμένα τὰν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἐσσεῖται πασᾶν τὰν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

15

δ'.

Δύο γραμμὰν δοθειςᾶν ἀνισᾶν, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθείαν τᾶς μὲν μείζονος τὰν δοθειςᾶν γραμμὰν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα.

20 Ὅσακίς γὰρ ἃ ὑπεροχά, ἢ ὑπερέχει ἃ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας τὸ ἐν τμήμα ἐλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. Εἰ μὲν οὖν καὶ ἡ ἃ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἐνὸς τμήματος
25 ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθείαν τᾶς μὲν ἐλάσσονος τὰν δοθειςᾶν δῆλον ὥς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος

5 ΝΞ ms. B : ΜΞ mss. DEGH || 21 αὐτὰ ἑαυτᾷ Heiberg : αὐτᾷ BCDEGH || 22 εἰς Heiberg : καὶ εἰς BDEGH || 24 καὶ ἡ Heiberg : καὶ BDEGH || 26 μείζων GH : μεῖζον DE || μείζονος BCGH : μείζονας DE.

férence est plus petite (sc. que le segment de droite), il suffit d'ajouter un segment partiel à la circonférence pour que cette somme soit, de même, supérieure à la plus petite (sc. des lignes données) et inférieure à la plus grande ; car la partie ajoutée est inférieure à l'excédent.

5.

Étant donné un cercle et une droite tangente au cercle, il est possible de mener du centre du cercle une droite vers la tangente de manière que le rapport du segment de droite, intercepté entre la tangente et la circonférence du cercle, au rayon soit inférieur au rapport entre l'arc du cercle compris entre le point de contact et la droite menée (sc. du centre) d'une part et, d'autre part, un arc de cercle quelconque donné.

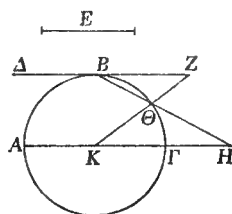


Fig. 3

Soit donné le cercle $AB\Gamma$; soit K son centre et ΔZ une tangente au cercle au point B ; soit donné, de plus, un arc de cercle quelconque ; or il est possible¹ de prendre un segment de droite plus grand que l'arc donné ; soit E un segment de droite supérieur à cet arc donné ; menons par le centre K parallèlement à ΔZ la droite AH et plaçons le segment de droite $H\Theta$, égal au segment E et orienté vers le point B ². Joignons

1. Cf. prop. 3.

2. Archimède ne se prononce pas sur les moyens de réaliser cette construction. Pour une solution du problème, cf. P. Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède*, I, p. 247.

Soit donné le cercle $AB\Gamma$, soit K son centre et ΓA une corde inférieure au diamètre ; que le rapport entre les segments de droite Z et H soit inférieur au rapport entre $\Gamma\Theta$ et $K\Theta$, $K\Theta$ étant l'apothème (sc. de $A\Gamma$) ; du centre menons KN parallèlement à $A\Gamma$, et élevons sur $K\Gamma$ la perpendiculaire au point Γ , soit $\Gamma\Lambda$; les triangles $\Gamma\Theta K$ et $\Gamma K \Lambda$ sont alors semblables¹ ; $\Gamma\Theta$ est donc à ΘK comme $K\Gamma$ est à $\Gamma\Lambda$ ² ; il s'ensuit que le rapport de Z à H est inférieur au rapport de $K\Gamma$ à $\Gamma\Lambda$. Soit donc un segment de droite supérieur à $\Gamma\Lambda$ et tel que le rapport de $K\Gamma$ à ce segment soit égal au rapport de Z à H ³. Soit BN ce segment et qu'il soit placé entre la circonférence et la droite (sc. KN) en passant par le point Γ ; il est possible, en effet, de découper (sc. la droite BN) de cette manière⁴ ; et elle tombera au delà (sc. de $\Gamma\Lambda$) du moment qu'elle est supérieure à $\Gamma\Lambda$. Puisque, donc, le rapport de KB à BN est égal au rapport de Z à H , le rapport de EB à $B\Gamma$ sera à son tour égal⁵ au rapport de Z à H .

7.

Avec les mêmes données, si on prolonge la corde, il est possible de mener du centre une droite vers le prolongement de la corde, de manière que le segment de droite compris entre la circonférence et le prolongement (sc. de la corde) ait au segment de droite joignant l'extrémité du segment intercepté (sc. par le cercle) à l'extrémité de la corde prolongée un rapport donné, à condition que ce rapport soit supérieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

1. Cf. Eucl. I, 29.

2. Cf. Eucl. VI, 4.

3. Cf. Eucl. V, 10.

4. Problème analogue à celui de la prop. 5 ; cf. p. 17, n. 2.

5. Cf. Eucl. VI, 2.

- Δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἃ ΓΑ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἃ Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἃ ΓΘ ποτὶ τὰν ΚΘ, καθέτου ἐούσας τᾶς ΚΘ · ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου
- 5 παρὰ τὰν ΑΓ ἃ ΚΝ καὶ τῇ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς ἃ ΓΛ · ὁμοῖα δὴ ἐστὶ τὰ ΓΘΚ, ΓΚΛ τρίγωνα. Ἔστιν οὖν ὡς ἃ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ οὕτως ἃ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἃ Ζ ποτὶ τὰν Η ἢ ἃ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. Ὅν δὴ λόγον ἔχει ἃ Ζ ποτὶ τὰν Η, τοῦτον ἐχέτω ἃ ΚΓ ποτὶ μείζονα
- 10 τᾶς ΓΛ. Ἐχέτω ποτὶ τὰν ΒΝ, κείσθω δὲ ἃ ΒΝ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ Γ · δυνατόν δὲ ἐστὶν οὕτως τέμνειν · καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν τᾶς ΓΛ. Ἐπεὶ οὖν ἃ ΚΒ ποτὶ ΒΝ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἃ Ζ ποτὶ Η, καὶ ἃ ΕΒ ποτὶ ΒΓ τὸν αὐτὸν ἔξει
- 15 λόγον ὃν ἃ Ζ ποτὶ Η.

ζ'.

- Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένης δυνατόν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημένην, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας
- 20 καὶ τᾶς ἐκβεβλημένης ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἐναπολαφθείσας ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένης τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἃ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένης ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμένην.

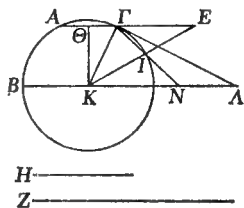


Fig. 5

Donnons-nous les mêmes éléments et prolongeons la corde ; que le rapport donné soit celui de Z à H , et qu'il soit supérieur au rapport de $\Gamma\Theta$ à ΘK ; il sera donc aussi supérieur au rapport de $K\Gamma$ à $\Gamma\Lambda$. Par conséquent $K\Gamma$ aura à un segment inférieur à $\Gamma\Lambda$ le rapport¹ qu'a Z à H . Soit IN ce segment, et qu'il soit orienté vers Γ ; il est en effet possible² de découper (sc. la droite ΓN) de cette manière, et elle tombera en deçà de $\Gamma\Lambda$ comme étant inférieure au segment $\Gamma\Lambda$. Du moment donc que le rapport de $K\Gamma$ à IN est égal au rapport de Z à H , le rapport de $E\Gamma$ à ΓI sera lui aussi égal au rapport de Z à H .

8.

Étant donné un cercle, dans le cercle une corde inférieure au diamètre et une tangente au cercle menée par une extrémité de la corde donnée, il est possible de mener du centre du cercle une droite vers la corde, de manière que le segment qui en est intercepté entre la circonférence et la corde donnée ait un rapport donné au segment intercepté sur la tangente, à condition que ce rapport soit inférieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

1. Cf. Eucl. V, 10.

2. Cf. p. 17, n. 2.

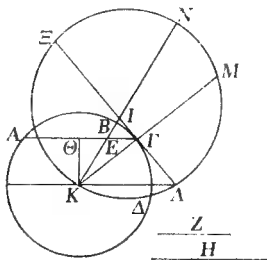


Fig. 6

Soit $AB\Gamma\Delta$ le cercle donné, et que soit donnée dans le cercle la corde ΓA , inférieure au diamètre ; soit ΞA la tangente au cercle au point Γ ; que le rapport entre les segments de droite Z et H soit inférieur au rapport de $\Gamma\Theta$ à ΘK . Ce rapport (sc. de Z à H) sera donc aussi inférieur au rapport de ΓK à ΓA , si KA est mené parallèlement à $\Theta\Gamma$. Dès lors, que le rapport de $K\Gamma$ à $\Gamma\Xi$ soit égal au rapport de Z à H ; $\Xi\Gamma$ est donc supérieur à ΓA ¹. Décrivons une circonférence de cercle passant par les points K , Λ , Ξ . Du moment donc que le segment de droite $\Xi\Gamma$ est supérieur au segment ΓA et que les droites $K\Gamma$ et ΞA sont perpendiculaires l'une à l'autre, il est possible de placer un segment de droite IN égal au segment $M\Gamma$ de façon qu'il soit orienté² vers K . Le rectangle de côtés ΞI et IA est donc au rectangle de côtés KE et IA comme ΞI est à KE , et le rectangle de côtés KI et IN est au rectangle de côtés KI et ΓA comme IN est à ΓA ; il s'ensuit que le rapport de IN à ΓA est lui aussi égal au rapport de ΞI à KE ³, d'où l'on déduit que les rapports de ΓM à ΓA , de $\Xi\Gamma$ à $K\Gamma$, de $\Xi\Gamma$ à KB sont à leur tour égaux au rapport de ΞI à KE , et que le rapport du reste $I\Gamma$ à BE est égal au rapport de $\Xi\Gamma$ à ΓK ⁴ et au rapport de H à Z . La droite KN rencontre donc la tangente, et le rapport entre le segment BE compris

1. Cf. Eucl. V, 10.

2. Cf. Pappus, ed. Hultsch, I, p. 298.

3. Cf. Eucl. III, 35 et VI, 2.

4. Cf. Eucl. V, 16, 19, 35.

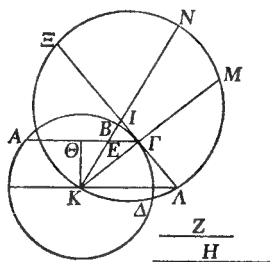


Fig. 6

Ἐστω κύκλος δεδομένος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ
 εὐθείᾳ δεδοσθῶ ἐλάσσων τῆς διαμέτρου ἡ ΓΑ, καὶ ἡ ΞΛ
 ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ
 Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΘ ποτὶ ΘΚ· ἐσσεῖται
 5 δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΚ ποτὶ ΓΛ, εἴ καὶ παράλ-
 ληλος ἀχθῇ ἡ ΚΛ τῇ ΘΓ· ἐχέτω δὴ ἡ ΚΓ ποτὶ ΓΞ τὸν
 αὐτὸν λόγον ὃν ἡ Ζ ποτὶ Η· μείζων δὴ ἐστὶν ἡ ΞΓ τῆς
 ΓΛ. Γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ Κ, Λ, Ξ. Ἐπεὶ
 οὖν ἐστὶ μείζων ἡ ΞΓ τῆς ΓΛ, καὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλάλαις
 10 αἱ ΚΓ, ΞΛ, δυνατόν ἐστι τῇ ΜΓ ἴσαν ἄλλαν θέμεν τὰν ΙΝ
 νεύουσας ἐπὶ τὸ Κ. Τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΞΙΛ
 ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΕ, ΙΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἡ ΞΙ
 ποτὶ ΚΕ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΙ, ΓΛ
 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἡ ΙΝ ποτὶ ΓΛ· ὥστε καὶ ἡ ΙΝ
 15 ποτὶ ΓΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΞΙ ποτὶ ΚΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΜ ποτὶ ΓΛ
 καὶ ἡ ΞΓ ποτὶ ΚΓ καὶ ποτὶ ΚΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΞΙ ποτὶ ΚΕ,
 καὶ λοιπὰ ἡ ΙΓ ποτὶ ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἡ ΞΓ
 ποτὶ τὰν ΓΚ καὶ ὃν ἡ Η ποτὶ Ζ. Πέπτωκεν οὖν ἡ ΚΝ ποτὶ
 τὰν ἐπιψαύουσας, καὶ ἔχει ἡ μεταξύ τῆς περιφερείας

7 δὴ Torellius : δέ codd. || 11 τῶν Torellius : τοῦ codd. || 14
 τὸν αὐτὸν... ποτὶ ΓΛ add. Commandinus || 18 Ζ Heiberg : τὸ Ζ
 mss. DEGH.

entre la circonférence et la corde d'une part, et, d'autre part, le segment intercepté sur la tangente est égal au rapport de Z à H .

9.

Avec les mêmes données, si on prolonge la corde donnée, il est possible de mener du centre du cercle vers le prolongement de la corde une droite telle que le rapport entre le segment compris entre la circonférence et le prolongement de la corde, d'une part, et, d'autre part, le segment intercepté sur la tangente à partir du point de contact soit égal à un rapport donné, à condition que ce rapport soit supérieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

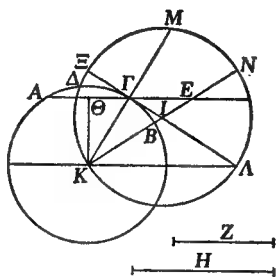


Fig. 7

Soit donné le cercle $AB\Gamma\Delta$; menons-y la corde $\Gamma\Lambda$ inférieure au diamètre ; soit $\Xi\Gamma$ la tangente au cercle au point Γ ; (sc. soient Z et H deux segments tels que) le rapport de Z à H soit supérieur au rapport de $\Gamma\Theta$ à ΘK ; ce rapport sera donc aussi supérieur au rapport de $K\Gamma$ à $\Gamma\Lambda$. Soit $K\Gamma$ à $\Gamma\Xi$ comme Z est à H ; il s'ensuit que ce segment (sc. $\Gamma\Xi$) est inférieur à $\Gamma\Lambda$ ¹.

1. Cf. Eucl. V, 10.

Décrivons de nouveau un cercle passant par les points Ξ , K , Δ . Le segment $\Xi\Gamma$ étant ainsi inférieur à $\Gamma\Lambda$, et les segments KM et $\Xi\Gamma$ étant perpendiculaires l'un à l'autre, il est possible¹ de placer un segment IN , égal à ΓM , de manière qu'il soit orienté vers le point K . Dès lors, puisque le rectangle de côtés ΞI et $I\Lambda$ est au rectangle de côtés ΛI et KE comme ΞI est à KE , que le rectangle de côtés ΞI et $I\Lambda$ est équivalent au rectangle de côtés KI et IN ² et que, enfin, le rectangle de côtés ΛI et KE est équivalent au rectangle de côtés KI et $\Gamma\Lambda$ à cause de l'égalité entre le rapport de KE à IK et le rapport de $\Lambda\Gamma$ à ΛI ³, il s'ensuit que ΞI est à KE comme le rectangle de côtés KI et IN est au rectangle de côtés KI et $\Gamma\Lambda$, c'est-à-dire comme NI est à $\Gamma\Lambda$, et encore comme ΓM est à $\Gamma\Lambda$. Or ΓM est aussi à $\Gamma\Lambda$ comme $\Xi\Gamma$ est à $K\Gamma$ ², c'est-à-dire à KB ; il s'ensuit que le rapport de ΞI à KE est égal au rapport de $\Xi\Gamma$ à KB , et que le rapport du reste $I\Gamma$ au reste BE est égal au rapport de $\Xi\Gamma$ à ΓK . Mais $\Xi\Gamma$ est à ΓK comme H est à Z ; la droite KE rencontre donc le prolongement de la corde, et le rapport entre le segment BE compris entre ce prolongement et la circonférence, d'une part, et, d'autre part, le segment ΓI découpé sur la tangente est égal au rapport de Z à H .

10.

Si des segments de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sont disposés les uns à la suite des autres, l'excédent étant égal au plus petit, et si on se donne un même nombre d'autres segments dont chacun a la grandeur du plus grand des premiers, les carrés sur les segments égaux au plus grand, augmentés du carré sur le plus grand et du rectangle ayant pour côtés le plus petit segment et la somme de tous les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur, sont équivalents à la triple somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur.

1-3. Cf. les notes compl.

- Πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν Ξ, Κ, Λ σαμείων. Ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΞΓ τῆς ΓΛ, καὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλάλαις αἱ ΚΜ, ΞΓ, δυνατόν τῇ ΓΜ ἴσαν θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσας ἐπὶ τὸ Κ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τὰν ΞΙΑ ποτὶ
- 5 τὸ ὑπὸ τὰν ΛΙ, ΚΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τὰν ΞΙΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙΝ, τῷ δὲ ὑπὸ τὰν ΛΙ, ΚΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙ, ΓΛ διὰ τὸ εἶμεν ὡς τὰν ΚΕ ποτὶ ΙΚ οὕτως τὰν ΛΓ ποτὶ ΛΙ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΚΙ, ΓΛ, τουτέστιν
- 10 ὡς ἡ ΝΙ ποτὶ ΓΛ, τουτέστιν ἡ ΓΜ ποτὶ ΓΛ. Ἔστιν δὲ καί, ὡς ἡ ΓΜ ποτὶ ΓΛ, ἡ ΞΓ ποτὶ ΚΓ, τουτέστι ποτὶ ΚΒ · ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἡ ΞΓ ποτὶ ΚΒ, καὶ λοιπὰ ἡ ΙΓ ποτὶ λοιπὰν τὰν ΒΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΞΓ ποτὶ ΓΚ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΞΓ ποτὶ ΓΚ, τοῦτον ἔχει ἡ Η ποτὶ Ζ · ποτι-
- 15 πέπτωκεν δὴ ἡ ΚΕ ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἡ μεταξὺ τῆς ἐκβεβλημένης καὶ τῆς περιφερείας ἡ ΒΕ ποτὶ τὰν ΓΙ τὰν ἀπὸ τῆς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἡ Ζ ποτὶ τὰν Η.

ι'.

- 20 Εἴ κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὅποσαι οὖν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ἥ δὲ ἡ ὑπεροχὰ ἴσα τῇ ἐλαχίστῃ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα τῇ μεγίστῃ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τὰν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τῆς μεγίστας
- 25 τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ἐλαχίστας καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν.

5 ΛΙ, ΚΕ ms. D : il ke B ΛΚΕ mss. EGH || ἡ add. Heiberg ||
 6 τῷ B : τὸ DEGH || 11 ἡ pr. add. Heiberg || 23 τῇ DEGH :
 om. C || 26 ταῖς C : om. DEGH.

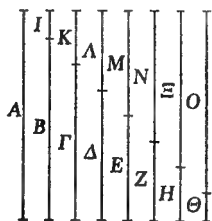


Fig. 8

Soient A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ des segments de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur et placés les uns à la suite des autres ; que Θ soit égal à l'excédent ; ajoutons à B le segment I égal à Θ, à Γ le segment K égal à H, à Δ le segment Λ égal à Ζ, à Ε le segment Μ égal à Ε, à Ζ le segment Ν égal à Δ, à Η le segment Ξ égal à Γ, à Θ le segment Ο égal à Β ; les segments ainsi obtenus seront égaux entre eux et égaux au plus grand. Il faut donc montrer que la somme des carrés sur A et sur les segments obtenus (sc. par les additions mentionnées), augmentée du carré sur A et du rectangle ayant pour côtés le segment Θ et le segment qui est la somme des segments A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, est égale à la triple somme des carrés sur A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ¹.

Le carré sur ΒΙ (c'est-à-dire sur la somme des segments Β et Ι) est équivalent² à la somme des carrés sur Ι et Β et du double du rectangle de côtés Β et Ι, le carré sur ΚΓ est équivalent à la somme des carrés sur Κ et Γ et du double rectangle de côtés Κ et Γ, et de la même manière aussi les carrés sur les autres segments égaux à Α sont équivalents à la somme des carrés sur les segments partiels et du double rectangle ayant pour côtés les segments partiels. Or la somme des carrés sur A, B,

1. En termes algébriques, il faut démontrer l'égalité :

$$A^2 + (B+I)^2 + (\Gamma+K)^2 + (\Delta+\Lambda)^2 + (E+M)^2 + (Z+N)^2 + (H+\Xi)^2 + (\Theta+O)^2 + A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2).$$

2. Cf. Eucl. II, 4.



Fig. 8

Ἔστων γραμμαὶ ὅποσαι οὖν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερέχουσιν αἱ A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, ἀ δὲ Θ ἴσα ἔστω τῇ ὑπεροχῇ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν B ἴσα τῇ Θ ἀ I, ποτὶ δὲ τὰν Γ ἀ K ἴσα τῇ H, ποτὶ δὲ τὰν Δ ἀ Λ ἴσα τῇ Z, ποτὶ δὲ τὰν E ἀ M ἴσα τῇ E, ποτὶ δὲ τὰν Z ἀ N ἴσα τῇ Δ, ποτὶ δὲ τὰν H ἀ Ξ ἴσα τῇ Γ, ποτὶ δὲ τὰν Θ ἀ O ἴσα τῇ B· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις καὶ τῇ μεγίστῃ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασῶν τῶν τε A καὶ τῶν γενομένων ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τῶν A τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῶν Θ καὶ τῶν ἴσας πάσαις ταῖς A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τῶν BI τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν I, B τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν B, I περιεχομένοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν KΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν K, Γ τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν K, Γ περιεχομένοις· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀλλῶν τῶν ἴσων τῇ A τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένοις. Τὰ μὲν οὖν ἀπὸ

1 ἔστων Heiberg : ἔστωσαν CEG ἔστω DH || 4 ἀ Λ mss. BCG : AA ms. H Λ mss. DE || 7 δὴ Nizzius : δὲ codd. || 15 δύο CDEH : δυσὶ G || τῶν alt. DEGH : om. C || 17 δύο CDEH : δυσὶ G || περιεχομένοις BG : περιεχομένων CDEH || 18 δὲ Torellius : δὴ BCDEH || 20 ὑπὸ BG : ἀπὸ CDEH.

$\Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ et des carrés sur $I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O$, augmentée du carré sur A , est équivalente à la double somme des carrés sur $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ ¹. Il nous reste à montrer que la double somme des rectangles ayant pour côtés les segments partiels dans chacun des segments égaux à A , augmentée du rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$, est égale à la somme des carrés sur $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$. Du moment, de plus, que le double rectangle de côtés B et I est équivalent au double rectangle de côtés B et Θ , que le double rectangle de côtés K et Γ est équivalent au rectangle de côtés Θ et 4Γ , puisque K est égal à 2Θ , que le double rectangle de côtés Δ et Λ est équivalent au rectangle de côtés Θ et 6Δ , puisque Λ est le triple de Θ , et que, de même, aussi les autres doubles rectangles ayant pour côtés les segments partiels sont équivalents aux rectangles ayant pour côtés Θ et le segment multiple, d'après la suite des nombres pairs, du segment suivant, il s'ensuit que la somme (sc. de tous les doubles rectangles), augmentée du rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$, sera équivalente au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de $A, 3 B, 5 \Gamma$, et ainsi de suite, toujours d'un multiple, dans l'ordre des nombres impairs, du segment suivant². Mais la somme des carrés sur $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ est, elle aussi, équivalente au rectangle admettant ces côtés. Le carré sur A est en effet équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A et des restes, dont chacun est égal³ à A , puisque Θ est contenu autant de fois dans A que A est contenu de fois dans la somme de A et des segments égaux à A ; il s'ensuit

1. En d'autres termes :

$$A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2 + I^2 + K^2 + \Lambda^2 + M^2 + N^2 + \Xi^2 + O^2 + A^2 = 2 (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2).$$

Cette égalité résulte de ce que :

$$I = \Theta, K = H, \Lambda = Z, M = E, N = \Delta, \Xi = \Gamma, O = B.$$

2 et 3. Cf. notes compl.

- τὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ ἀπὸ τὰν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετραγώνων · λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμες ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων
- 5 ὑπὸ τῶν τραμάτων τῶν ἐν ἐκάστῃ γραμμῇ τὰν ἰσὴν τῇ Α ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα ἐντι τοῖς ἀπὸ τὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ Β, Ι περιεχόμενα ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τὰν Β, Θ περιεχομένοις,
- 10 δύο δὲ τὰ ὑπὸ τὰν Κ, Γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς Γ διὰ τὸ τὰν Κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς Θ, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τὰν Δ, Λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς Θ καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς Δ διὰ τὸ τὰν Λ τριπλασίαν εἶμεν τᾶς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ
- 15 περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τραμάτων ἴσα ἐντι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας αἰεὶ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἐπομένης γραμμᾶς, τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἐσσοῦνται ἴσα τῷ
- 20 περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῇ τε Α καὶ τῇ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ αἰεὶ τῇ [περισσῇ] κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἐπομένης γραμμᾶς. Ἐντι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχο-
- 25 μένῳ ὑπὸ τὰν αὐτῶν γραμμῶν. Ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας [πάσαις] τῇ τε Α καὶ τῇ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἀν ἐκάστα ἴσα τῇ Α · ἰσάκεις γὰρ μετρεῖ ἃ τε Θ τὰν Α καὶ ἃ Α τὰς ἴσας αὐτῇ πάσας σὺν τῇ Α · ὥστε ἴσον ἐστὶ

2 Ο ποτιλαβόντα Β : ΟΠ ποτιλαβόντα DEH ποτιλαβόντα CG ||
 5 τῶν pr. add. Heiberg || 22 περισσῇ del. Heiberg || 23 πολλα-
 πλασίᾳ Heiberg : πολλαπλασίους BCDEGH || 27 πάσαις del.
 Heiberg || 29 σὺν Torellius : ἐν BCDEGH.

que le carré sur A est équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de A à la double somme de B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ ; car la somme des segments égaux à A, hormis A, est égale à la double somme de B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ . De même, le carré sur B est équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de B à la double somme de Γ , Δ , E, Z, H, Θ , le carré sur Γ équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de Γ à la double somme de Δ , E, Z, H, Θ , et de la même manière les carrés sur les autres segments sont équivalents aux rectangles ayant pour côtés Θ et la somme du segment même et du double des segments restants. Il est donc évident que la somme des carrés sur tous les segments est équivalente au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A, de 3 B, de 5 Γ , et ainsi de suite, toujours d'un multiple, dans la suite des nombres impairs, du segment suivant.

COROLLAIRE

Il est manifeste, d'après ce qui précède, que la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand est inférieure au triple de la somme des carrés sur les segments se dépassant l'un l'autre de la même grandeur, puisque, si on lui ajoute quelques grandeurs¹, elle en devient le triple, mais qu'elle est supérieure au triple de la seconde somme diminuée du carré sur le plus grand segment, puisque ce qui est ajouté (sc. à la première somme) est inférieur au triple carré sur le plus grand segment². C'est pour cette raison aussi que, si on décrit des figures semblables sur tous les segments, tant sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux au plus grand segment, la somme des figures décrites sur les segments égaux au plus grand segment est

1 et 2. Cf. notes compl.

- τὸ ἀπὸ **A** τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς **Θ** καὶ τᾶς ἴσας τῇ **A** καὶ τῇ διπλασίᾳ τᾶν **B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ**· αἱ γὰρ ἴσαι τῇ **A** πᾶσαι χωρὶς τᾶς **A** διπλάσιαι ἐντὶ τᾶν **B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ**. Ὅμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς
- 5 **B** τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς **Θ** καὶ τᾶς ἴσας τῇ τε **B** καὶ τῇ διπλασίᾳ τᾶν **Γ, Δ, E, Z, H, Θ**, καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς **Γ** τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τε τᾶς **Θ** καὶ τᾶς ἴσας τῇ τε **Γ** καὶ τῇ διπλασίᾳ τᾶν **Δ, E, Z, H, Θ**, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλων τετράγωνα ἴσα ἐντὶ
- 10 τοῖς περιεχομένοις ὑπὸ τε τᾶς **Θ** καὶ τᾶς ἴσας αὐτῇ τε καὶ τῇ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασῶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς **Θ** καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῇ τε **A** καὶ τῇ τριπλασίᾳ τᾶς **B** καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τᾶς **Γ** καὶ τῇ κατὰ τοὺς ἐξῆς
- 15 ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἐπομένης.

ΠΟΡΙΣΜΑ

- Ἐκ τούτου οὖν φανερόν ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐστιν
- 20 ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μεῖζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἶδεα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν,
- 25 ἀπὸ τῆς τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ, τὰ εἶδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων

2 B Basil. : AB mss. BCDEGH || 7 τε CG : om. DEH || 8 Δ ms. B : om. CDEGH || 24 ἀναγραφέωντι C : ἀναγεγραφέωντι DH ἀναγεγραφοθέντι G ἀναγεγραφοθέντι E || 26 τὰ εἶδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ add. Commandinus.

inférieure au triple de la somme des figures décrites sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, mais elle est supérieure au triple de la seconde somme diminuée de la figure construite sur le plus grand segment, puisque les figures semblables auront entre elles le même rapport que les carrés¹.

11.

Si des segments de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre de la même grandeur, sont disposés les uns à la suite des autres, et si on dispose d'autres segments, en nombre inférieur d'une unité au nombre de ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, et dont chacun est égal au plus grand (sc. des premiers), le rapport entre la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand et la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sans le carré sur le plus petit, est inférieur au rapport entre le carré sur le plus grand, d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle ayant pour côtés le plus grand et le plus petit et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand sur le plus petit, tandis que le rapport (sc. de la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand) à la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf le carré sur le plus grand, est supérieur au rapport indiqué.



Fig. 9

1. Cf. Eucl. VI, 20.

ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἶδεος μείζονα ἢ τριπλάσια · τὸν γὰρ αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἶδεα τοῖς τετραγώνοις.

ια'.

- 5 Εἴ κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὅποσαι οὖν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσai, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα ἴσα τῇ μεγίστῃ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ
- 10 ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις ἰῶ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾧ ὑπερέχει ἂ
- 15 μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

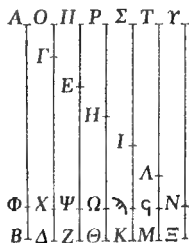


Fig. 9

7 τῷ alt. DEGH : τὸ C || 9 τὰ sec. om. C || 12 τὸ ἴσον DEGH : τὸν ἴσον C || 14 τοῦ B : τῷ DEGH om. C || τετραγώνου B : τετραγώνῳ CDEGH || ἂ DEGH : τὰ C.

Soit un nombre quelconque de segments de droite se dépassant l'un l'autre et disposés les uns à la suite des autres, de manière que AB soit plus grand que $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ plus grand que EZ , EZ que $H\Theta$, $H\Theta$ que IK , IK que ΛM , ΛM que $NΞ$; ajoutons à $\Gamma\Delta$ le segment ΓO égal à un excédent, à EZ le segment $E\Pi$ égal à deux excédents, à $H\Theta$ le segment HP égal à trois excédents, et ainsi de suite aux autres segments de la même manière ; les segments ainsi obtenus seront alors égaux entre eux, et chacun sera égal au plus grand. Il faut donc montrer que le rapport entre la somme des carrés sur les segments obtenus et la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur, sauf le carré sur $NΞ$, est inférieur au rapport entre le carré sur AB , d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle de côtés AB et $NΞ$ et du tiers du carré sur NY , mais que le rapport (sc. de la somme des carrés sur les segments obtenus) à la somme des carrés des mêmes segments (sc. des segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur), sauf le carré sur AB , est supérieur au rapport indiqué.

Retranchons de chacun des segments, qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, un segment égal à l'excédent ; dès lors, le rapport entre le carré sur AB et la somme du rectangle de côtés AB et ΦB et du tiers du carré sur $A\Phi$ est égal au rapport entre le carré sur $O\Delta$, d'une part, et, d'autre part, la somme du rectangle de côtés $O\Delta$ et ΔX et du tiers du carré sur XO , et au rapport entre le carré sur ΠZ et la somme du rectangle de côtés ΠZ et ΨZ et du tiers du carré sur $\Psi\Pi$, et aux rapports entre les carrés sur les autres segments et les aires prises de la même manière ; il s'ensuit¹ que le rapport entre la somme des carrés sur $O\Delta$, ΠZ , $P\Theta$, ΣK , TM , $\Upsilon Ξ$, d'une part, et, d'autre part, la somme des rectangles, ayant pour côtés $NΞ$ et les segments indiqués, et du tiers de la somme

1. Cf. Eucl. V, 12.

- Ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὅποσαι οὖν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν
 ὑπερέχουσαι ἐξῆς κείμεναι, ἃ μὲν **AB** τᾶς **ΓΔ**, ἃ δὲ **ΓΔ**
 τᾶς **ΕΖ**, ἃ δὲ **ΕΖ** τᾶς **ΗΘ**, ἃ δὲ **ΗΘ** τᾶς **ΙΚ**, ἃ δὲ **ΙΚ** τᾶς
ΛΜ, ἃ δὲ **ΛΜ** τᾶς **ΝΞ**, ποτικείσθω δὲ ποτὶ μὲν τὰν **ΓΔ**
 5 ἴσα μιᾷ ὑπεροχῇ ἃ **ΓΟ**, ποτὶ δὲ τὰν **ΕΖ** ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς
 ἃ **ΕΠ**, ποτὶ δὲ τὰν **ΗΘ** ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἃ **ΗΡ**, καὶ
 ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον · ἐσσοῦνται δὲ αἱ
 γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι καὶ ἐκάστα τῇ μεγίστῃ. Δεικτέον
 οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τὰν γενομενᾶν τετράγωνα ποτὶ
 10 μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τὰν τῷ ἴσῳ
 ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΝΞ** τετραγώνου
 ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς **AB** τετράγωνον ποτὶ
 τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τὰν **AB**, **ΝΞ**
 καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΝΥ** τετραγώνου, ποτὶ δὲ
 15 τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τὰν αὐτᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς
AB τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.
 Ἀπολελάφθω ἀφ' ἐκάστας τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν
 ὑπερεχουσᾶν ἴσα τῇ ὑπεροχῇ · ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ
 τᾶς **AB** ποτὶ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τὰν **AB**, **ΦΒ** περιεχό-
 20 μενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΑΦ** τετραγώνου,
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τό τε ἀπὸ τᾶς **ΟΔ** τετράγωνον ποτὶ
 τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν **ΟΔ**, **ΔΧ** καὶ τὸ τρίτον μέρος
 τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΧΟ** τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ
 τᾶς **ΠΖ** ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν **ΠΖ**, **ΨΖ** καὶ τὸ
 25 τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΨΠ** τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τὰν
 ἀλλᾶν τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία ·
 καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τὰν **ΟΔ**, **ΠΖ**, **ΡΘ**, **ΣΚ**,
ΤΜ, **ΥΞ** ποτὶ τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τε τᾶς **ΝΞ**
 καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ

4 δὲ alt. B : δὴ CDEGH || τὰν C : τὰ DEGH || 13 ΝΞ
 mss. BCGH : ΗΞ mss. DE || 27 ΡΘ ms. B : ΡΟ mss. CD
 EGH || 28 τὰ add. Heiberg || περιεχόμενα BDEGH : περιεχο-
 μέναν C.

des carrés sur OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN est égal au rapport du carré sur AB à la somme du rectangle de côtés AB et ΦB et le tiers du carré sur ΦA ¹. Si on démontre, dès lors, que le rectangle, ayant pour côtés $N\Xi$ et le segment égal à la somme de $O\Delta$, ΠZ , $P\Theta$, ΣK , TM , $\Upsilon\Xi$, augmenté du tiers de la somme des carrés sur OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN est inférieur à la somme des carrés sur AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM , mais supérieur à la somme des carrés sur $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM , $N\Xi$, on aura démontré la proposition.

Or le rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la somme des segments $O\Delta$, ΠZ , $P\Theta$, ΣK , TM , $\Upsilon\Xi$, augmenté du tiers de la somme des carrés sur OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN est équivalent à la somme des carrés sur $X\Delta$, ΨZ , $\Omega\Theta$, λK , ςM , $N\Xi$, augmentée du rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la somme des segments OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN et du tiers de la somme des carrés sur OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN ; d'autre part, la somme des carrés sur AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM est équivalente à la somme des carrés sur $B\Phi$, $X\Delta$, ΨZ , $\Omega\Theta$, λK , ςM , augmentée de la somme des carrés sur $A\Phi$, ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$ et du rectangle ayant pour côtés $B\Phi$ et la double somme de $A\Phi$, ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$. Or les carrés sur les segments égaux à $N\Xi$ sont en commun de part et d'autre, le rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la somme des segments OX , $\Pi\Psi$, ΩP , $\lambda\Sigma$, ςT , ΥN est inférieur au rectangle ayant pour côtés $B\Phi$ et la double somme des segments $A\Phi$, ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$, parce que la somme des segments que nous venons d'indiquer est égale à la somme des segments ΓO , $E\Pi$, PH , $I\Sigma$, ΛT , ΥN et

1. Cf. notes compl.

τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τὰν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τὰν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ
 5 τετραγώνου. Εἰ οὖν κα δειχθῇ τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τὰν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τὰν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων
 10 τῶν ἀπὸ τὰν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

Ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τὰν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, λΚ, ςΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας
 15 πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τὰν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σλ, Τς, ΥΝ, τὰ δὲ ἀπὸ τὰν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ τετράγωνα ἴσα
 20 τοῖς ἀπὸ τὰν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, λΚ, ςΜ τετραγώνοις καὶ τοῖς ἀπὸ τὰν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιλ, Λς καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τὰν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιλ, Λς. Κοινὰ μὲν οὖν ἐντὶ ἐκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τὰν ἰσᾶν τᾷ ΝΞ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ
 25 τᾶς ἴσας ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, λΣ, ςΤ, ΥΝ ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τε τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τὰν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιλ, Λς διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ ἴσας εἶμεν, τὰν δὲ λοιπὰν

8 μὲν add. Heiberg || 13 ΥΞ ms. C : ΥΝ mss. BDEGH || 16 τᾶς alt. add. Heiberg || 21 ΗΩ mss. BEG : ΜΩ mss. CDH || Ιλ mss. BEG : Ρλ mss. CDH || 22 τᾶς pr. Basil. : τᾶν CD EGH || ΗΩ ms. G : ΝΩ mss. BDEH, ΜΩ ms. C || 24 τε C : om. DEGH || 27 γραμμὰς BCG : γραμμαῖς DEH || 28 ΓΟ mss. BC : ΓΘ mss. DEGH.

supérieure à la somme de leurs restes¹, et la somme des carrés sur $A\Phi$, ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$ est supérieure² au tiers de la somme des carrés sur OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN ; car cela a été démontré dans ce qui précède; il s'ensuit que la somme des aires indiquées est inférieure à la somme des carrés sur AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM .

Nous démontrerons, enfin, que la somme de ces aires est supérieure à la somme des carrés sur $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM , $N\Xi$. La somme des carrés sur $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM , $N\Xi$ est ainsi de nouveau équivalente à la somme des carrés sur $X\Gamma$, $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$, augmentée de la somme des carrés sur $X\Delta$, ΨZ , $\Omega\Theta$, λK , ςM , $N\Xi$ et du rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la double somme³ des segments ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$. De plus, la somme des carrés sur $X\Delta$, ΨZ , $\Omega\Theta$, λK , ςM , $N\Xi$ est en commun, tandis que le rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la somme des segments OX , $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma\lambda$, $T\varsigma$, ΥN est supérieur au rectangle ayant pour côtés $N\Xi$ et la double somme des segments ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$ ³. En outre, la somme des carrés sur XO , $\Psi\Pi$, ΩP , $\lambda\Sigma$, ςT , ΥN est supérieure au triple de la somme des carrés sur ΓX , $E\Psi$, $H\Omega$, $I\lambda$, $\Lambda\varsigma$; car cette propriété a été démontrée elle aussi; par conséquent la somme des aires indiquées est supérieure à la somme des carrés sur $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, IK , ΛM , $N\Xi$.

COROLLAIRE

Si, dès lors, on construit des figures semblables sur tous les segments, tant sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux au plus grand, le rapport entre la somme des figures construites sur les segments égaux au plus grand, d'une part, et, d'autre part, la somme des

1. A savoir $\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\lambda + \Lambda\varsigma$.

2. Parce que $\Gamma O + E\Pi + P H + I\Sigma + A T + \Upsilon N > \Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\lambda + \Lambda\varsigma$ et $OX + \Pi\Psi + \Omega P + \lambda\Sigma + \varsigma T + \Upsilon N = (\Gamma O + E\Pi + P H + I\Sigma + A T + \Upsilon N) + (\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\lambda + \Lambda\varsigma)$.

3. Cf. Eucl. II, 4.

μείζονας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΞ, ΛϚ μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρους τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΞ, ΤϚ, ΥΝ · δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω · ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετρα-

5 γώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

Λοιπὸν δὲ δεῖξοῦμες ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Πάλιν δὴ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΞ, ΛϚ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν

10 ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΞΚ, ϚΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΞ, ΛϚ. Καί ἐστι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΞΚ, ΜϚ, ΝΞ, μείζον δὲ τὸ ὑπὸ τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΞ, ΤϚ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς

15 διπλασίας πασᾶν τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΞ, ΛϚ, ἐντὶ δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ΞΣ, ϚΤ, ΥΝ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΞ, ΛϚ μείζονα ἢ τριπλάσια · δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο · μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ,

20 ΝΞ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ τοίνυν εἴ κα ὁμοῖα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπὸ τε τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τῶν ἰσᾶν τῷ μεγίστῳ, εἶδεα, πάντα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσᾶν τῷ μεγίστῳ

25 ποτὶ τὰ ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς

2-3 μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρους τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΞ, ΤϚ, ΥΝ add. Commandinus et Torellius || 9-10 τοῖς ἀπὸ τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΞΚ, ϚΜ, ΝΞ καὶ add. Commandinus || 11 ΗΩ ms. B : Ω mss. CDEH, ΩΗ ms. G || 13-14 ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΞ, ΤϚ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς om. B || 14 ΠΨ Basil. : ΠΡ mss. DEGH || 16 τὰ pr. C : om. DEGH || 22 ἀναγραφέωντι BCG : ἀναγραφέντι DEH || 24-25 ἰσᾶν τῷ μεγίστῳ ποτὶ τὰ ἀπὸ τῶν add. Torellius.

figures construites sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf la figure construite sur le plus petit segment, sera inférieur au rapport entre le carré sur le plus grand segment, d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle, ayant pour côtés le plus grand et le plus petit segment, et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand segment sur le plus petit, tandis que le rapport (sc. de la somme des figures construites sur les segments égaux au plus grand segment) à la somme de ces mêmes figures, sauf la figure construite sur le plus grand segment, sera supérieur au rapport indiqué ; car les figures semblables auront entre elles le même rapport que les carrés¹.

DÉFINITIONS

1. Si une ligne droite est menée dans un plan et si, l'une de ses extrémités restant sur place, elle tourne avec une vitesse constante un nombre quelconque de fois pour reprendre la position d'où elle est partie ; si, de plus, pendant cette rotation de la ligne droite, un point se meut sur la droite avec une vitesse constante à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan.

2. Nous appellerons origine de la spirale l'extrémité de la droite qui reste immobile pendant que la droite tourne.

3. Nous appellerons origine de la révolution la position de la droite à partir de laquelle la droite commence à tourner.

4. Nous appellerons première droite le segment de droite que le point se déplaçant sur la droite parcourt pendant la première révolution, seconde droite le segment que le même point parcourt pendant la seconde révolution, et nous désignerons de la même manière les autres segments de droite par le nom (sc. d'ordre) des révolutions.

1. Cf. Eucl. VI, 20.

τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἶδεος ἐλάσσονα λόγον ἐξοῦντι
 ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον
 ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τε τᾶς μεγίστας
 καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς,
 5 ἃ ὑπερέχει ἃ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ
 τᾶν αὐτᾶν εἶδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ
 αὐτοῦ λόγου· τὸν αὐτὸν γὰρ ἐξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα
 εἶδεα τοῖς τετραγώνοις.

ΟΡΟΙ

10 α'. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ
 μένοντος τοῦ ἐτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιε-
 νεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν,
 ἅμα δὲ τῇ γραμμᾷ περιαγομένῃ φέρεται τι σαμεῖον
 ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ
 15 τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἔλικά γράψει ἐν τῷ
 ἐπιπέδῳ.

β'. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον
 περιαγομένης αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἔλικος.

γ'. Ἀ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ' ἧς ἄρξατο ἡ εὐθεῖα
 20 περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

δ'. Εὐθεῖα, ἂν μὲν ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ διαπορευθῇ
 τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω,
 ἂν δ' ἐν τῇ δευτέρῃ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ,
 δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς
 25 περιφοραῖς καλείσθωσαν.

2 τὸ pr. CEGH : τῷ D || 10 καὶ add. Torellius || 14 ἑαυτῷ
 BCGH : ἑαυτὸ DE || 21 εὐθεῖα, ἂν CDEGH : rectum si B.

5. Nous appellerons première aire l'aire comprise entre la (sc. partie de la) spirale décrite pendant la première révolution et la première droite, seconde aire l'aire comprise entre la (sc. partie de la) spirale décrite pendant la seconde révolution et la seconde droite, et ainsi de suite pour les noms des aires suivantes.

6. Si on mène une droite du point qui est l'origine de la spirale, nous appellerons l'avant tout ce qui est situé du côté de la droite vers lequel la révolution se fait, et l'arrière tout ce qui est situé de l'autre côté.

7. Nous appellerons premier cercle le cercle décrit autour du point d'origine de la spirale comme centre avec un rayon égal à la première droite, second cercle le cercle décrit autour du même centre avec un rayon égal au double de ce segment de droite, et ainsi de suite pour les noms des cercles suivants.

12.

Si à une spirale décrite en une seule révolution (sc. d'ordre) quelconque, sont menées, de l'origine de la spirale, des droites en nombre quelconque faisant entre elles des angles égaux, ces droites (c'est-à-dire les segments de ces droites compris entre l'origine et la spirale) se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur¹.

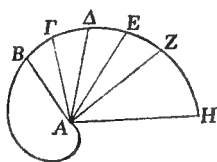


Fig. 10

1. Proposition citée par Pappus, IV, 33.

ε'. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τε τῆς ἑλικος
 τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τῆς εὐθείας,
 ἃ ἔστιν πρώτη, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπὸ
 τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρῃ περιφορᾷ γραφείσας
 5 καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ
 ἄλλα ἐξῆς οὕτω καλείσθω.

ζ. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὃ ἔστιν ἀρχὰ τῆς ἑλικος,
 ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμή, τῆς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ
 αὐτά, ἐφ' ἃ κα ἡ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω,
 10 τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐπομένα.

ζ'. Ὁ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὃ
 ἔστιν ἀρχὰ τῆς ἑλικος, διαστήματι δὲ τῇ εὐθείᾳ, ἃ ἔστιν
 πρώτη, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ
 αὐτῷ, διαστήματι δὲ τῇ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω,
 15 καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἐξῆς τοῦτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

ιβ'.

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἑλικά τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιοῦν
 γεγραμμέναν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι
 ὁποιοιοῦν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ
 20 ὑπερέχοντι ἀλλάλᾳν.

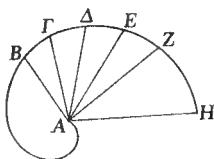


Fig. 10

5-6 καὶ τὰ ἄλλα ἐξῆς οὕτω καλείσθω om. C || 8 τὰ pr. add.
 Heiberg || 9 ἐφ' ἃ κα add. Heiberg || 14 τᾷ C : om. DEGH || 17
 κα BDEGH : καὶ C || τὰν ἐν Heiberg : τὰ μὲν BCDEGH || 18
 γεγραμμέναν C : γεγραμμένα BDEGH.

Soit une spirale dans laquelle les segments de droite AB , $A\Gamma$, $A\Delta$, AE , AZ font entre eux des angles égaux. Il faut démontrer que l'excès de $A\Gamma$ sur AB est égal à l'excès de $A\Delta$ sur $A\Gamma$ et qu'il en est de même pour les autres segments.

En effet, le temps, pendant lequel la droite qui tourne vient de AB en $A\Gamma$, est le même que celui pendant lequel le point se déplaçant sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB , et pendant le temps que la droite met à venir de $A\Gamma$ en $A\Delta$ le point parcourt l'excédent de $A\Delta$ sur $A\Gamma$. Mais la droite qui tourne arrive de AB en $A\Gamma$ en un temps qui est égal à celui qu'elle met à arriver de $A\Gamma$ en $A\Delta$, puisque les angles sont égaux ; c'est donc dans des temps égaux que le point qui se déplace sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB et l'excédent de $A\Delta$ sur $A\Gamma$. Il s'ensuit que l'excédent de $A\Gamma$ sur AB est égal à l'excédent de $A\Delta$ sur $A\Gamma$ ¹, et il en est de même pour les autres droites.

13.

Si une droite est tangente à une spirale, elle sera tangente en un seul point.

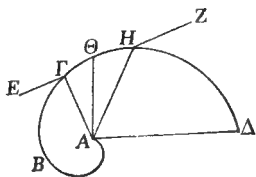


Fig. 11

Soit une spirale $AB\Gamma\Delta$; soit le point A l'origine de la spirale et la droite $A\Delta$ l'origine de la révolution ;

1. Cf. prop. 1.

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς αἱ AB, AG, AD, AE, AZ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. Δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἡ AG τῆς AB καὶ ἡ AD τῆς AG καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

Ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἡ περιαγομένη γραμμὰ ἀπὸ τῆς AB
 5 ἐπὶ τὰν AG ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ἥ ὑπερέχει ἡ GA τῆς AB , ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τῆς AG ἐπὶ τὰν AD , ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν, ἥ ὑπερέχει ἡ AD τῆς AG . Ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἡ περιαγομένη γραμμὰ ἀπὸ τε
 10 τῆς AB ἐπὶ τὰν AG ἀφικνεῖται καὶ ἀπὸ τῆς AG ἐπὶ τὰν AD , ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν, ἥ ὑπερέχει ἡ GA τῆς AB , καὶ τὰν ὑπεροχὰν, ἥ ὑπερέχει ἡ AD τῆς AG . Τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἡ τε AG τῆς AB καὶ
 15 ἡ AD τῆς AG , καὶ αἱ λοιπαί.

ιβ'.

Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τῆς ἑλικος ἐπιψαύη, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον.

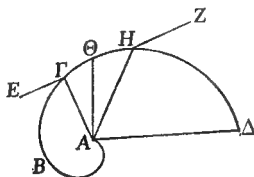


Fig. 11

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς τὰ $A, B, Γ, Δ$, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν
 20 τῆς ἑλικος τὸ A σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ AD

soit ZE une tangente à la spirale. Je dis qu'elle n'y est tangente qu'en un seul point.

Qu'elle soit tangente, en effet, en deux points, Γ et H ; menons les droites $A\Gamma$ et AH et bissectons l'angle compris entre AH et $A\Gamma$; soit Θ le point de rencontre entre la bissectrice et la spirale. Dès lors, l'excédent de AH sur $A\Theta$ est égal à l'excédent de $A\Theta$ sur $A\Gamma$, puisque les angles $HA\Theta$ et $\Theta A\Gamma$ sont égaux¹. Il s'ensuit que la somme des segments AH et $A\Gamma$ est égale au double du segment $A\Theta$. Mais cette somme est supérieure au double de la bissectrice (sc. $A\Theta$ de l'angle ΓAH) dans le triangle (sc. $A\Gamma H$)². Il est donc évident que le point où la droite $A\Theta$ rencontre ΓH est situé entre les points Θ et A ; la droite EZ coupe donc la spirale, puisqu'un des points de la droite $\Gamma\Theta H$ est à l'intérieur de la spirale³. Mais on avait supposé cette droite tangente ; il s'ensuit que la droite EZ est tangente à la spirale en un seul point.

14.

Si deux droites menées du point d'origine d'une spirale à la (sc. partie de la) spirale décrite dans la première révolution sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les segments de droite menés à la spirale auront entre eux le même rapport que les arcs de cercle situés entre l'extrémité de la spirale et les extrémités des droites prolongées jusqu'à la circonférence, ces arcs étant pris vers l'avant à partir de l'extrémité de la spirale⁴.

Soit $AB\Gamma\Delta E\Theta$ une spirale décrite dans la première révolution ; soit A le point d'origine de la spirale,

1. Cf. prop. 12.

2. Archimède se réfère ici à une proposition qui ne figure pas explicitement chez Euclide ; sur ce théorème, cf. Sturm, *Des unvergl. Archimedis Kunstbücher*, Nuremberg, 1670, p. 403 ; Nizze, *A.'s vorh. Werke*, Stralsund 1824, p. 133 ; Heiberg dans *Zeitschrift für Math. und Phys.*, XXIV, p. 178.

3. Cf. Eucl. III, 16 coroll.

4. Cf. Pappus, IV, 32.

εὐθεία, καὶ ἐπιψαύετω τᾶς ἑλικος εὐθειά τις ἅ ΖΕ. Φαμί δὴ καθ' ἐν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς.

- Ἐπιψαύετω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σαμεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἡ γωνία δίχα τετμάσθω
- 5 ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΑΓ, καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν τῇ ἑλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ Θ. Τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἃ τε ΑΗ τᾶς ΑΘ καὶ ἡ ΑΘ τᾶς ΑΓ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ποτ' ἀλλάλας· ὥστε διπλάσιαί ἐντι αἱ ΑΗ, ΑΓ τᾶς ΑΘ. Ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ
- 10 τριγώνῳ [τᾶς ΑΘ] δίχα τεμνούσας τὴν γωνίαν μεῖζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δηλὸν οὖν ὅτι, καθ' ὃ συμπίπτει σαμεῖον τῇ ΓΗ εὐθείᾳ ἡ ΑΘ, μεταξὺ τῶν Θ, Α ἐντὶ σαμείων· τέμνει ἄρα ἡ ΕΖ τὰν ἑλικά, ἐπειδὴ τι τῶν ἐν τῇ ΓΘΗ σαμείων ἐντὸς ἐστί τᾶς ἑλικος. Ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα·
- 15 καθ' ἐν ἄρα μόνον ἄπτεται ἡ ΕΖ τᾶς ἑλικος.

ιδ'.

- Εἴ κα ποτὶ τὰν ἑλικά τὰν ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένην ποτιπεσέωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τᾶς ἑλικος, καὶ ἐκβληθέντι ποτὶ τὰν τοῦ
- 20 πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἑλικος καὶ τῶν περάτων τῶν ἐκβληθειςῶν εὐθειῶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβαν-
- 25 νομενᾶν τὰν περιφερειῶν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἑλικος.

Ἐστω ἑλιξ ἡ ΑΒΓΔΕΘ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἑλικος ἔστω τὸ Α σαμεῖον, ἡ δὲ

10 τᾶς ΑΘ del. Heiberg || μεῖζονές BG : μεῖζων DEH ||
 11 συμπίπτει G : συμπίπτει τὸ CDEH || 15 ΕΖ mss. BG : EH mss. CDEH || 18 ἐκβληθέντι DEGH : ἐκβληθέν C ||
 21 ὃν BCG : ὧν DEH.

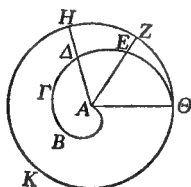


Fig. 12

la droite OA l'origine de la révolution, et OKH le premier cercle. Menons du point A à la spirale les segments de droite AE et AD et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle aux points Z et H . Il faut démontrer que le rapport de AE à AD est égal au rapport de l'arc OKZ à l'arc OKH .

Il est en effet évident que, pendant que la droite AO tourne, le point O se déplace sur la circonférence OKH avec une vitesse constante, et que le point A , qui se déplace sur la droite, parcourt le segment de droite AO , que, pendant que le point O décrit, dans son mouvement sur la circonférence du cercle, l'arc OKZ , le point A parcourt le segment de droite AE , et que, encore, le point A parcourt le segment de droite AD pendant que le point O parcourt l'arc OKH , chacun des deux points se déplaçant avec une vitesse constante. Il est donc évident que le rapport de AE à AD est égal au rapport de l'arc OKZ à l'arc OKH ¹.

On démontrera de la même manière que si l'une des droites menées venait à tomber sur l'extrémité de la spirale, la proposition reste vraie.

1. Cf. prop. 2.

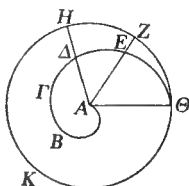


Fig. 12

ΘΑ εὐθεῖα ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς ἔστω, καὶ κύκλος ὁ
 ΘΚΗ ἔστω ὁ πρῶτος, ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ Α σαμείου
 ποτὶ τὰν ἑλικά αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ
 κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν
 5 ἔχοντι λόγον ἃ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἃ ΘΚΖ περιφέρεια
 ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν.

Περιογόμενας γὰρ τῆς ΑΘ γραμμᾶς δῆλον ὡς τὸ
 μὲν Θ σαμεῖον κατὰ τῆς τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείας
 ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως, τὸ δὲ Α κατὰ τῆς εὐθείας
 10 φερόμενον τὰν ΑΘ γραμμὰν πορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον
 κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον τὰν ΘΚΖ
 περιφέρειαν, τὸ δὲ Α τὰν ΑΕ εὐθεῖαν, καὶ πάλιν τό τε
 Α σαμεῖον τὰν ΑΔ γραμμὰν καὶ τὸ Θ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν,
 ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον · δῆλον οὖν
 15 ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἃ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἃ ΘΚΖ
 περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν [δέδεικται γὰρ
 τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις].

Ὅμοιως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἃ ἑτέρα τὰν ποτι-
 πιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τῆς ἑλικος ποτιπίπτῃ, ὅτι τὸ
 20 αὐτὸ συμβαίνει.

4 τὰ DEGH : τὰς C || 10 πορεύεται C : πεπορεύεται DEH
 πεπόρευται G || 18 ἃ om. C || 19 ὅτι add. Heiberg || 19-20 τὸ
 αὐτὸ συμβαίνει om. B || 20 συμβαίνει DEH : συμβαίνει CG.

15.

Si des droites menées de l'origine de la spirale rencontrent la spirale décrite dans la seconde révolution, elles auront entre elles le même rapport que les arcs indiqués (sc. dans la proposition 14) augmentés (sc. chacun) de la circonférence entière du cercle.

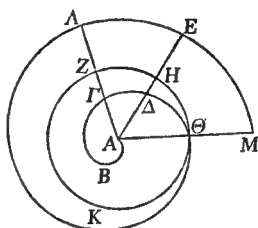


Fig. 13

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta\Theta$, où l'arc $AB\Gamma\Delta\Theta$ est décrit dans la première, l'arc $\Theta\Lambda EM$ dans la seconde révolution. Menons vers la spirale les droites AE et AA . Il faut démontrer que le rapport de AA à AE est égal au rapport de l'arc ΘKZ , augmenté de la circonférence entière du cercle, à l'arc ΘKH augmenté de la circonférence entière du cercle.

Car le temps pendant lequel le point A , en se déplaçant sur la droite, parcourt le segment AA , est égal au temps mis par le point Θ , dans son mouvement sur la circonférence du cercle, à parcourir la circonférence entière du cercle, augmentée de l'arc ΘKZ , et le point A parcourt le segment de droite AE pendant que le point Θ parcourt la circonférence entière, augmentée de l'arc ΘKH , chacun des deux points se déplaçant

ιε'.

Εἰ δέ κα ποτὶ τὰν ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἑλικά ποτιπύπτοντι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ
5 εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας.

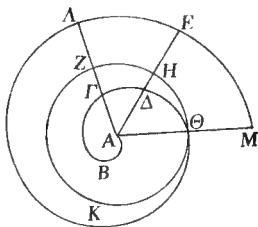


Fig. 13

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ $ΑΒΓΔΘ$, ἡ μὲν $ΑΒΓΔΘ$ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἡ δὲ $ΘΛΕΜ$ ἐν τῇ δευτέρᾳ, καὶ ποτιπύπτοντων εὐθεῖαι αἱ $ΑΕ$, $ΑΛ$. Δεικτέον ὅτι τὸν
10 αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἡ $ΑΛ$ ποτὶ τὰν $ΑΕ$, ὃν ἡ $ΘΚΖ$ περιφέρεια μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ $ΘΚΗ$ μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ $Α$ σμεῖον κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον τὰν $ΑΛ$ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ $Θ$
15 σμεῖον κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν $ΘΚΖ$ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ $Α$ σμεῖον τὰν $ΑΕ$ εὐθείαν καὶ τὸ $Θ$ ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν $ΘΚΗ$, ἐκάτερον ἰσοταχῶς αὐτὸ ἑαυτῷ φερό-

2 δὲ om. BC || 7 ἡ pr. DEGH : αἱ C || 9 ποτιπύπτοντων G : ποτιπύπτοντι CE ποτιπύπτοντι DH || 13 ἴσῳ B : ὁσῳ CDEGH || 18 καὶ τὸ Θ Torellius : κατὰ τὸ E codd.

avec une vitesse constante. Il est donc évident que le rapport du segment de droite AA au segment AE est égal au rapport de l'arc ΘKZ , augmenté de la circonférence entière du cercle, à l'arc ΘKH augmenté de la circonférence entière du cercle¹.

De la même manière on montrera que, aussi quand des droites sont menées vers la spirale décrite dans la troisième révolution (sc. les segments interceptés sur) elles auront entre elles (sc. eux) le même rapport que les arcs indiqués, augmentés, chacun, de la circonférence du cercle prise deux fois ; on montre encore de la même manière que les droites menées vers les autres spirales ont elles aussi le même rapport que les arcs indiqués, augmentés, chacun, de la circonférence entière du cercle, prise autant de fois qu'il y a de révolutions, moins une unité, et cela même si l'une des droites tombe sur l'extrémité de la spirale.

16.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la première révolution, et si on mène une droite du point de contact au point qui est l'origine de la spirale, les angles que fait la tangente avec la droite menée seront inégaux, celui de l'avant² étant obtus, celui de l'arrière² étant aigu.

Soit $AB\Gamma\Delta\Theta$ une spirale décrite dans la première révolution, A le point qui est l'origine de la spirale, $A\Theta$ la droite qui est l'origine de la révolution, et ΘKH le premier cercle ; soit $E\Delta Z$ une tangente à la spirale au point Δ ; joignons Δ à A par la droite ΔA . Il faut démontrer que les droites ΔZ et ΔA font entre elles un angle obtus.

1. Cf. prop. 2.

2. Cf. définition 6.

μενον · δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἃ ΑΛ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἃ ΘΚΖ περιφέρειαι μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

- 5 Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ποτὶ τὰν ἐν τῇ τρίτῃ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἔλικα ποτιπεσέωντι εὐθεῖαι, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἐξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας δις λαμβανομένας · ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ
10 τὰς ἄλλας ἔλικας ποτιπίπτουσαι δεικνυνται ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαυτάκις λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐνὶ ἐλάσσων ἀριθμὸς τὰν περιφορᾶν, καὶ εἴ κα ἃ ποτιπίπτουσα ἃ ἐτέρα ποτὶ τὸ πέρας τῆς ἔλικος πίπτῃ.

15

ις'.

- Εἴ κα τῆς ἔλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφ᾽ αὐτῆς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τῆς ἔλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἃ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν,
20 ἀνίστοι ἐσσοῦνται καὶ ἃ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεία, ἃ δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ὀξεῖα.

- Ἔστω ἔλιξ, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Θ, ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Α σαμεῖον ἀρχὰ τῆς ἔλικος, ἃ δὲ ΑΘ εὐθεῖα ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, ὃ τε πρῶτος κύκλος
25 ὁ ΘΚΗ, ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τῆς ἔλικος ἃ ΕΔΖ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἃ ΔΑ. Δεικτέον ὅτι ἃ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΔ ἀμβλείαν ποιεῖ γωνίαν.

7 ὅτι add. Nizzius || 8 αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι BDEGH : ἃ εἰρημένα περιφέρεια C || 11 αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι Torellius : ἃ εἰρημένα περιφέρεια codd. || 12 τοσαυτάκις BG : τοσαύτας CDEH || 13 ἐνὶ BG : ἐν CDEH || 14 ἐτέρα Heiberg : ἐκατέρα codd. || 26 ΕΔΖ Heiberg : ΔΕΖ codd.

ἡ ΡΙ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὄν ἔχει ἡ
 ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν · καὶ ὅλα
 ἄρα ἡ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΡΔΝΤ
 περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν, τουτέστιν ὄν
 5 ἔχει ἡ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν.
 Ὅν δὲ ἡ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν,
 τοῦτον ἔχει ἡ ΑΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ · δέδεικται γὰρ
 τοῦτο · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΙ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ περ
 ἡ ΛΑ ποτὶ τὰν ΑΔ · ὅπερ ἀδύνατον · ἴσα γὰρ ἡ ΡΑ τῇ
 10 ΑΔ. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τὰν ΑΔΖ.
 Δέδεικται δὲ ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα · ἀμβλεία ἄρα ἐστίν. Ὡστε
 ἡ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν.

Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἡ ἐπιψαύουσα τῆς
 ἑλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύη, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

15

ιζ'.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμ-
 μένας ἑλικος ἐπιψαύη ἡ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

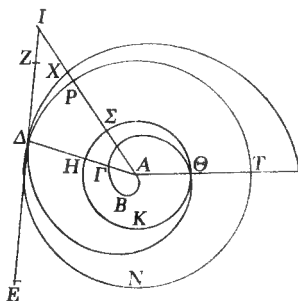


Fig. 15

5 ΗΚΘ mss. CD : ΚΘ mss. BEGH || 13 δὲ C : om. BD
 EGH || 14 ὅτι add. Heiberg.

Que la droite EZ soit tangente à la spirale, décrite dans la seconde révolution, au point Δ , les autres constructions étant les mêmes que les précédentes¹. La partie de la circonférence du cercle $P\Delta$ située du côté de l'avant tombera à l'intérieur de la spirale, tandis que la partie située du côté de l'arrière tombera à l'extérieur. L'angle $A\Delta Z$ n'est donc pas droit, mais obtus. Qu'il soit en effet, si possible, droit ; dès lors, la droite EZ sera tangente au cercle $P\Delta$ au point Δ ². Menons donc encore la droite AI vers la tangente ; que AI coupe la spirale au point X et la circonférence du cercle $P\Delta$ au point P ; que le rapport du segment de droite PI au segment PA soit inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à la circonférence entière du cercle ΔPN , augmentée de l'arc ΔNT ; car on a démontré que cela est possible³ ; dès lors le rapport du segment de droite entier IA au segment AP est inférieur au rapport entre la somme de l'arc $P\Delta NT$ et de la circonférence entière du cercle, d'une part, et, d'autre part, la somme de l'arc ΔNT et de la circonférence entière du cercle. Mais le rapport entre l'arc $P\Delta NT$, augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP , et l'arc ΔNT , augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP , est égal au rapport de l'arc de cercle $\Sigma HK\Theta$, augmenté de la circonférence entière du cercle $\Theta \Sigma HK$, à l'arc de cercle $HK\Theta$, augmenté de la circonférence entière du cercle $\Theta \Sigma HK$, et le rapport entre les arcs que nous venons d'indiquer en dernier lieu est égal au rapport du segment de droite XA au segment A Δ , comme cela a été démontré⁴ ; il s'ensuit que le rapport du segment IA à AP est inférieur au rapport de AX à A Δ , ce qui est impossible du moment que PA est égal à A Δ , et IA supérieur à AX. Il est donc évident que l'angle $A\Delta Z$ est obtus et que, par conséquent, l'angle restant est aigu.

1. Cf. prop. 16.

2. Cf. Eucl. III, 16, coroll.

3. Cf. prop. 5.

4. Cf. prop. 15.

- Ἐπιψαυέτω γὰρ ἡ ΕΖ εὐθεῖα τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ὅμοίως δὴ τῆς τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφερείας τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τῆς
- 5 ἑλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ἐκτός · ἡ οὖν γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΑΔΖ οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεία. Ἐστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά · ἐπιψάουσι δὴ ἡ ΕΖ τοῦ ΡΝΔ κύκλου κατὰ τὸ Δ. Ἀχθῶ δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσιν ἡ ΑΙ καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἑλικά κατὰ τὸ Χ,
- 10 τὰν δὲ τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ, ἐχέτω δὲ ἡ ΡΙ ποτὶ ΡΑ ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΡ περιφέρειαν ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ ΔΡΝ κύκλου περιφέρειαν καὶ [ποτὶ] τὰν ΔΝΤ · δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατόν ἓν · καὶ ὅλα ἄρα ἡ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἡ
- 15 ΡΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ ΡΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου
- 20 περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΣΗΚΘ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ΘΣΗΚ ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τῆς τοῦ ΘΣΗΚ κύκλου περιφερείας, ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΧΑ εὐθεῖα ποτὶ
- 25 τὰν ΑΔ εὐθεῖαν · δέδεικται γὰρ τοῦτο · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἡ ΑΧ ποτὶ τὰν ΑΔ · ὅπερ ἀδύνατον [ἴση μὲν γὰρ ἡ ΡΑ τῇ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΙΑ τῆς ΑΧ]. Δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔΖ · ὥστε ἡ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστὶ.

1 ΕΖ mss. BC : AZ mss. DEGH || περιφορᾷ BCG : περιφορᾶς DEH || 4 κύκλου περιφερείας Heiberg : περιφερείας κύκλου codd. || 9 ἡ DEGH : αἱ C || 13 ποτὶ del. Heiberg || 20 περιφέρειαν CH : περιφέρειαν DEG.

La proposition reste vraie aussi dans le cas où la tangente à la spirale y est tangente en son extrémité.

On montrera de la même manière que, même dans le cas où une droite est tangente à une spirale décrite dans n'importe quelle révolution, et même si elle y est tangente en son extrémité, cette droite fera des angles inégaux avec la droite menée du point de contact à l'origine de la spirale, et que l'angle du côté de l'avant est obtus, tandis que l'angle du côté de l'arrière est aigu¹.

18.

Si une droite est tangente à une spirale, décrite dans la première révolution, à l'extrémité de la spirale, et si du point qui est l'origine de la spirale on élève la perpendiculaire sur l'origine de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment de cette perpendiculaire compris entre la tangente et l'origine de la spirale sera égal à la circonférence du premier cercle.

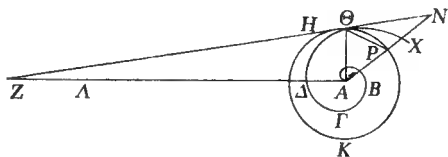


Fig. 16

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta\Theta$, le point A son origine, la droite ΘA l'origine de la révolution, ΘHK le premier cercle. Soit ΘZ une tangente à la spirale au point Θ , et AZ la perpendiculaire à ΘA élevée au point A . Cette perpendiculaire rencontrera la droite ΘZ du moment que les droites $Z\Theta$ et ΘA comprennent entre

1. Cf. prop. 15.

Τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρασ τῆς ἑλικος ἐπιψαύη.

Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τῆς ἐν ὁποιοῦν περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλικος ἐπιψαύη τις εὐθεῖα, καὶ
5 εἴ κα κατὰ τὸ πέρασ αὐτῆς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τῆς ἀφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τῆς ἑλικος καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλείαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἐπομένοις ὀξείαν.

ιη'.

- 10 Εἴ κα τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύη κατὰ τὸ πέρασ τῆς ἑλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τῆς ἑλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ἡ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἐπιψαυούσῃ, καὶ ἡ μεταξὺ εὐθεῖα τῆς ἐπιψαυούσας καὶ
15 τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος ἴσα ἐσσεῖται τῇ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

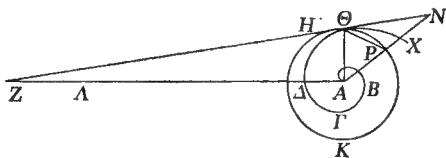


Fig. 16

Ἐστω ἑλιξ ἡ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ Α σαμεῖον ἀρχὰ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ ΘΑ γραμμὰ ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΘΗΚ κύκλος ὁ πρῶτος, ἐπιψαυέτω δὲ τις τῆς ἑλικος κατὰ
20 τὸ Θ ἡ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΘΑ ἡ ΑΖ· συμπεσεῖται δὴ αὐτὰ ποτὶ τὰν ΘΖ, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΘΑ ὀξείαν

elles un angle aigu¹. Soit Z le point de rencontre. Il faut démontrer que le segment de droite ZA est égal à la circonférence du cercle ΘKH .

En effet, s'il n'est pas égal, il est ou bien plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord, si possible, plus grand. Nous avons donc pris un segment de droite ΛA inférieur à ZA, mais supérieur à la circonférence du cercle ΘHK ². On a donc un cercle ΘHK et, dans ce cercle, un segment de droite ΘH inférieur au diamètre³; de plus, le rapport de ΘA à ΛA est supérieur au rapport de la moitié de $H\Theta$ à la perpendiculaire abaissée du point A sur $H\Theta$, puisqu'il est aussi supérieur au rapport de ΘA à AZ ⁴. Il est donc possible de mener du point A au prolongement de $Z\Theta$ une droite AN telle que le rapport du segment de droite NP, compris entre la circonférence du cercle et le prolongement de $Z\Theta$, à ΘP soit égal au rapport de ΘA à ΛA ⁵. Il s'ensuit que NP sera à PA comme ΘP est à ΛA ⁶. Mais le rapport de ΘP à ΛA est inférieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car le segment de droite ΘP est inférieur à l'arc ΘP , et le segment de droite ΛA est supérieur à la circonférence du cercle ΘHK . Par conséquent, le rapport de NP à PA sera aussi inférieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK . Le rapport du segment de droite entier NA au segment de droite AP est donc inférieur au rapport de la somme de l'arc ΘP et de la circonférence entière du cercle à la circonférence du cercle ΘHK . Mais le rapport de la somme de l'arc ΘP et de la circonférence entière du cercle ΘHK à la circonférence du cercle ΘHK est égal au rapport de XA à $A\Theta$; car cela a été démontré⁷; le rapport de NA à AP est donc inférieur au rapport de XA à $A\Theta$, ce qui est impossible, puisque NA est supérieur à AX et que AP est égal à ΘA . Par conséquent, ZA n'est pas supérieur à la circonférence du cercle ΘHK .

1. Cf. prop. 16 ; Eucl. I, post. 5.

2. Cf. prop. 4.

3-7. Cf. notes compl.

γωνίαν περιέχοντι. Συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. Δεικτέον ὅτι ἂ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερεία.

- Εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Ἔλαβον δὴ τινα εὐθείαν τὰν ΛΑ τᾶς
- 5 μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζονα. Ἔστιν δὴ κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἂ ΘΗ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἂ ΘΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἂ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν,
- 10 διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἂ ΘΑ ποτὶ ΑΖ · δυνατόν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν ΑΝ, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένης τὰν ΝΡ ποτὶ ΘΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἂ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ · ἔξει οὖν ἂ ΝΡ ποτὶ τὰν ΡΑ λόγον, ὃν ἂ ΘΡ εὐθεῖα
- 15 ποτὶ τὰν ΑΛ. Ἄ δὲ ΘΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἂ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν · ἂ μὲν γὰρ ΘΡ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἂ δὲ ΑΛ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζων · ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔξει καὶ ἂ ΝΡ
- 20 ποτὶ ΡΑ ἢ ἂ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν · καὶ ὅλα οὖν ἂ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἂ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ
- 25 ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἂ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ · δέδεικται γὰρ τοῦτο · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἂ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ περ ἂ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ · ὅπερ ἀδύνατον · ἂ μὲν γὰρ ΝΑ μείζων ἐστὶ τᾶς ΑΧ, ἂ δὲ ΑΡ ἴσα ἐστὶ τῇ ΘΑ. Οὐκ ἄρα
- 30 μείζων ἂ ΖΑ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ ΘΗΚ.

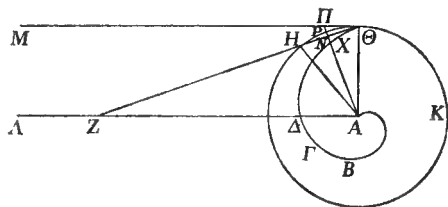


Fig. 17

Que le segment de droite ZA soit maintenant, si possible, inférieur à la circonférence du cercle ΘHK . Nous avons donc pris, cette fois, un segment de droite AA supérieur à AZ, mais inférieur à la circonférence du cercle ΘHK^1 . Menons par le point Θ la parallèle ΘM à AZ. Nous avons donc de nouveau le cercle ΘHK et dans ce cercle un segment de droite ΘH inférieur au diamètre et une autre droite, tangente au cercle au point Θ^2 ; le rapport de $A\Theta$ à AA est inférieur au rapport de la moitié de $H\Theta$ à la perpendiculaire abaissée du point A sur $H\Theta$, puisqu'il est aussi inférieur au rapport de ΘA à AZ. Il est donc possible de mener, du point A à la tangente, un segment de droite AΠ tel que le rapport du segment de droite PN, compris entre la corde du cercle et la circonférence, au segment de droite $\Theta\Pi$, découpé sur la tangente (sc. menée au premier cercle en Θ), soit égal au rapport de ΘA à AA³; la droite AΠ coupera donc le cercle en P et la spirale en X, et, par permutation⁴, le rapport de NP à PA sera égal au rapport de $\Theta\Pi$ à AA. Mais le rapport de $\Theta\Pi$ à AA est supérieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car le segment de droite $\Theta\Pi$ est supérieur à l'arc ΘP , et le segment de droite AA est inférieur à la circonférence du cercle ΘHK . Il s'ensuit que le rapport de ΠP à AP est supérieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK , de façon que le rapport de

1-4. Cf. notes compl.

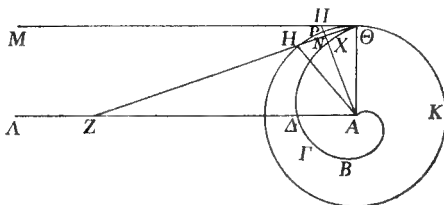


Fig. 17

Ἐστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἡ ZA τῆς τοῦ
 ΘHK κύκλου περιφερείας. Ἐλαβον δὴ τινα εὐθείαν πάλιν
 τὴν AL τῆς μὲν AZ μείζονα, τῆς δὲ τοῦ ΘHK κύκλου
 περιφερείας ἐλάσσονα, καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘM
 5 παράλληλον τῇ AZ . Πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ ΘHK καὶ
 ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τῆς διαμέτρου ἡ ΘH καὶ ἄλλα
 ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν ἔχει
 ἡ $A\Theta$ ποτὶ τὴν AL , ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἡμίσεια τῆς
 $H\Theta$ ποτὶ τὴν ἀπὸ τοῦ A κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἀγμένην,
 10 ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘA ποτὶ AZ ἐλάσσων ἐστὶ· δυνατόν
 οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ A ἀγαγεῖν τὴν AP ποτὶ τὴν ἐπιψαύουσαν,
 ὥστε τὴν PN τὴν μετὰ τῆς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας καὶ
 τῆς περιφερείας ποτὶ τὴν ΘP τὴν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ
 τῆς ἐπιψαυούσας τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘA
 15 ποτὶ τὴν AL · τεμεῖ δὴ ἡ AP τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ P ,
 τὴν δὲ ἑλικά κατὰ τὸ X · καὶ ἔξει καὶ ἐναλλαξ τὸν αὐτὸν
 λόγον ἡ NP ποτὶ PA , ὃν ἡ ΘP ποτὶ AL . Ἄ δὲ ΘP ποτὶ
 τὴν AL μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΘP περιφέρεια ποτὶ τὴν
 τοῦ ΘHK κύκλου περιφέρειαν· ἡ μὲν γὰρ ΘP εὐθεῖα
 20 μείζων ἐστὶν τῆς ΘP περιφερείας, ἡ δὲ AL ἐλάσσων τῆς
 τοῦ ΘHK κύκλου περιφερείας· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει
 ἡ PR ποτὶ τὴν AP ἢ ἡ ΘP περιφέρεια ποτὶ τὴν τοῦ ΘHK

PA à AN est supérieur au rapport de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP . Mais le rapport de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP est égal au rapport du segment de droite ΘA à AX, comme cela a été démontré¹. Le rapport de PA à AN est donc supérieur au rapport de ΘA à AX, ce qui est impossible². Le segment de droite ZA n'est donc ni supérieur ni inférieur à la circonférence du cercle ΘHK . Il lui est donc égal.

19.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la deuxième révolution en son extrémité, et qu'on élève la perpendiculaire sur la droite, origine de la révolution, au point origine de la spirale, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment de droite compris entre la tangente et l'origine de la spirale est égal au double de la circonférence du deuxième cercle.

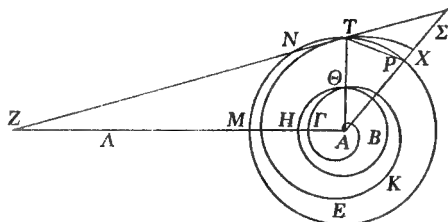


Fig. 18

Soit $AB\Gamma\Theta$ une spirale décrite dans la première révolution, ΘET la spirale décrite dans la seconde révolution; soit ΘKH le premier cercle, TMN le deuxième cercle; soit TZ une tangente à la spirale

1. Cf. prop. 14.

2. Parce que $PA = \Theta A$ et $AN > AX$; cf. Eucl. V, 8.

κύκλου περιφέρειαν ὥστε καὶ ἡ PA ποτὶ τὰν AN μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ α τοῦ ΘHK κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘKP περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ α τοῦ ΘHK κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘKP περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἡ

5 ΘA εὐθεῖα ποτὶ τὰν AX · δέδεικται γὰρ τοῦτο· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ PA ποτὶ τὰν AN ἢ ἡ ΘA ποτὶ τὰν AX · ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ZA τὰς τοῦ ΘHK κύκλου περιφέρειας· ἴσα ἄρα.

ιθ'.

- 10 Εἰ δὲ καὶ τὰς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἑλικας κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύη εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τὰς ἀρχῶν τὰς ἑλικας ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τῇ ἀρχῇ τὰς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτὰ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ μετὰ τὰς ἐπιψαυούσας καὶ τὰς ἀρχῶν τὰς
- 15 ἑλικας διπλασία τὰς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειας.

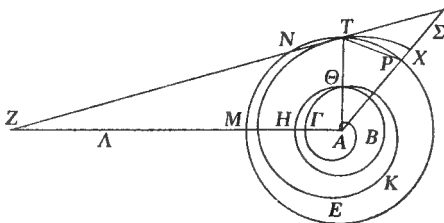


Fig. 18

Ἐστω γὰρ ἡ μὲν $AB\Gamma\Theta$ ἑλιξ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἡ δὲ ΘET ἐν τῇ δευτέρᾳ, καὶ ὁ μὲν ΘKH κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ TMN ὁ δεύτερος, ἔστω δὲ τις

2 ἢ ἡ $BDEGH$: ἡ C || 3 ΘHK mss. BCG : ΘNK mss. DEH || 4 τοῦτον $BDEGH$: ταύτην C || 10 καὶ Heiberg : κατὰ $DEGH$ καὶ C om. B || 14 ἀρχῆς BC : ἀρχῆς καὶ $DEGH$.

au point Θ ; menons la perpendiculaire ZA à TA ; cette perpendiculaire rencontrera la droite TZ du moment que, comme on l'a démontré¹, l'angle ATZ est aigu. Il faut démontrer que le segment de droite ZA est égal au double de la circonférence du cercle TMN .

Si, en effet, le segment ZA n'est pas le double (sc. de la circonférence TMN), il est ou bien supérieur ou bien inférieur au double. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur au double ; donnons-nous un segment de droite AA qui soit inférieur au segment de droite ZA et supérieur au double de la circonférence du cercle TMN ². Sont donc donnés un cercle TMN et dans le cercle une corde TN inférieure au diamètre, et le rapport de TA à AA est supérieur au rapport de la moitié de TN à la perpendiculaire abaissée de A sur TN ; il est dès lors possible de mener de A un segment de droite $A\Sigma$ vers le prolongement de TN , de manière que le rapport du segment $P\Sigma$, compris entre la circonférence et le prolongement de TN , au segment TP soit égal au rapport du segment TA à AA ; la droite $A\Sigma$ coupera donc le cercle en P et la spirale en X , et, par permutation³, le rapport de $P\Sigma$ à TA sera égal au rapport de TP à AA . Mais le rapport de TP à AA est inférieur au rapport de l'arc de cercle TP au double de la circonférence du cercle TMN , du moment que le segment de droite TP est inférieur à l'arc de cercle TP et que le segment de droite AA est supérieur au double de la circonférence du cercle TMN ; il s'ensuit que le rapport du segment $P\Sigma$ à AP ⁴ est inférieur au rapport de l'arc TP au double de la circonférence du cercle TMN ; par conséquent, le rapport du segment entier ΣA au segment AP est inférieur au rapport de la somme de l'arc de cercle TP et du double de la circonférence du cercle TMN au double de la circonférence du cercle TMN . Or le

1. Cf. prop. 17.

2. Cf. prop. 4.

3. Cf. Eucl. V, 16.

4. Parce que $AP = AT$.

γραμμὰ ἐπιψαύουσα τὰς ἑλικος ἑκατὰ τὸ Θ ἂν TZ, ἂν δὲ ZA ποτ' ὀρθὰς ἄχθῃ τῇ TA · συμπεσεῖται δὲ αὐτὰ τῇ TZ διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὴν γωνίαν ὀξείαν ἐοῦσαν τὴν ὑπὸ τῶν ATZ. Δεικτέον ὅτι ἂν ZA εὐθεία διπλασία ἐντὶ τὰς

5 τοῦ TMN κύκλου περιφερείας.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν διπλασία, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ διπλασία, καὶ λελάφθῃ τις εὐθεῖα ἂν ΛΑ τὰς μὲν ZA εὐθείας ἐλάσσων, τὰς δὲ τοῦ TMN κύκλου περι-
 10 φερείας μείζων ἢ διπλασία. Ἐστὶν δὴ τις κύκλος ὁ TMN καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ δεδομένα ἐλάσσων τὰς διαμέτρου ἂν TN, καὶ ὃν ἔχει ἂν TA ποτὶ τὴν ΑΛ μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἂν ἡμίσεια τὰς TN ποτὶ τὴν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἀγμένην · δυνατόν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν τὴν
 15 ΑΣ ποτὶ τὴν TN ἐκβεβλημένην, ὥστε τὴν μεταξὺ τὰς περιφερείας καὶ τὰς ἐκβεβλημένας τὴν ΡΣ ποτὶ τὴν ΤΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἂν TA ποτὶ τὴν ΑΛ · τεμεῖ δὴ ἂν ΑΣ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ ἑλικά κατὰ τὸ Χ · καὶ ἐναλλάξ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἂν ΡΣ ποτὶ τὴν
 20 ΤΑ, ὃν ἂν ΤΡ ποτὶ τὴν ΑΛ. Ἄ δὲ ΤΡ ποτὶ τὴν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἂν ΤΡ περιφέρειαν ποτὶ τὴν διπλασίαν τοῦ TMN κύκλου περιφέρειαν · ἔστιν γὰρ ἂν μὲν ΤΡ εὐθεῖα ἐλάσσων τὰς ΤΡ περιφερείας, ἂν δὲ ΑΛ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τὰς τοῦ TMN κύκλου περιφερείας · ἐλάσσονα
 25 ἄρα λόγον ἔχει ἂν ΡΣ ποτὶ τὴν ΑΡ ἢ ἂν ΤΡ περιφέρειαν ποτὶ τὴν διπλασίαν τὰς τοῦ TMN κύκλου περιφερείας · ὅλα οὖν ἂν ΣΑ ποτὶ τὴν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἂν ΤΡ περιφέρειαν μετὰ τὰς τοῦ TMN κύκλου περιφερείας δις εἰρημέναις ποτὶ τὴν τοῦ TMN κύκλου περιφέρειαν

2 δὲ BCDEH : δὴ G || αὐτὰ G : τῇ αὐτῇ CDEH ipsi B ||
 11 γραμμὰ δεδομένα Heiberg : γραμμὰ G γεγραμμένα BCDEH ||
 12 ἂν alt. DEH : λόγον ἂν G et proportio quam habet quae B ||
 17 ἔχειν G : ἔχει CDEH || 21 διπλασίαν CGH : διπλασία DE ||
 22 TMN mss BG : MN mss. CDEH || 24 τοῦ C : om. DEGH.

rapport entre les arcs de cercle que nous venons d'indiquer est égal au rapport du segment de droite XA au segment AT , comme cela a été démontré¹ ; il s'ensuit que le rapport du segment $A\Sigma$ au segment AP est inférieur au rapport de XA à TA , ce qui est impossible². Le segment de droite ZA n'est donc pas supérieur au double de la circonférence du cercle TMN . On montrera de la même manière qu'il n'est pas non plus inférieur ; il est donc évident qu'il est égal au double de cette circonférence.

On peut montrer par les mêmes procédés que, aussi dans le cas où une droite est tangente à une spirale, décrite dans n'importe quelle révolution, en l'extrémité de la spirale et où la perpendiculaire, élevée à l'origine de la spirale sur la droite, origine de la révolution, rencontre la tangente, elle (sc. le segment intercepté sur elle) est autant de fois multiple de la circonférence du cercle (sc. correspondant) que l'indique le nombre qui compte les révolutions.

20.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la première révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, si du point de contact on mène une droite à l'origine de la spirale et qu'on décrit, autour de l'origine de la spirale comme centre et avec un rayon égal au segment ainsi mené, un cercle, si, enfin, on élève à l'origine de la spirale une perpendiculaire sur la droite menée du point de contact vers l'origine de la spirale, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment compris entre le point de rencontre et l'origine de la spirale sera égal à l'arc du cercle décrit compris entre le point de contact et le point où le cercle décrit coupe la droite origine de la révolution, cet arc de cercle étant pris du côté de l'avant à partir du point situé sur la droite origine de la révolution.

1. Cf. prop. 15.

2. Parce que $A\Sigma > XA$ et $AP = TA$; cf. Eucl. V, 8.

δὺς εἰρημέναν. Ὅν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περι-
 φέρεται, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΤ ·
 δέδεικται γὰρ τοῦτο · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΣ
 ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἡ ΧΑ ποτὶ τὰν ΤΑ · ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ
 5 ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ διπλασία ἡ ΖΑ εὐθεία τῆς τοῦ ΤΜΝ
 κύκλου περιφερείας. Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ
 ἐλάσσων ἡ διπλασία. Δῆλον οὖν ὅτι διπλασία ἐστίν.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον, καὶ εἴ κα τῆς ἐν
 ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλικος ἐπιψαύῃ τις
 10 εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος, καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς
 τῆς ἑλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς
 συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὅτι πολλαπλασία ἐστὶν
 τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῆς
 περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

15

κ'.

Εἴ κα τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης
 εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος,
 ἀπὸ δὲ τῆς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τῆς ἑλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ,
 καὶ κέντρῳ μὲν τῇ ἀρχῇ τῆς ἑλικος, διαστήματι δὲ τῇ
 20 ἐπιζευχθείσῃ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τῆς ἀρχῆς τῆς
 ἑλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τῇ ἀπὸ τῆς ἀφᾶς ἐπὶ τὰν
 ἀρχὰν τῆς ἑλικος ἐπιζευχθείσῃ, συμπεσεῖται αὐτὰ ποτὶ
 τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἡ μετὰ εὐθεῖα τῆς τε
 συμπτώσεως καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος ἴσα τῇ περιφερείᾳ
 25 τοῦ γραφέντος κύκλου τῇ μετὰ εὐθεῖα τῆς ἀφᾶς καὶ τῆς
 τομᾶς, καθ' ἣν τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τῆς
 περιφορᾶς, ἐπὶ τὰ προαγόμενα λαμβανομένας τῆς
 περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς.

6 ὅτι BDEGH : om. C || 12 ὅτι add. Nizzius || 21 τῇ G :
 om. CDEH || 24 συμπτώσεως Heiberg : συμπτώσεως CDEGH
 || 25 τῇ G : τῆς CDEH || 26 ἄν B : δ CDEGH.

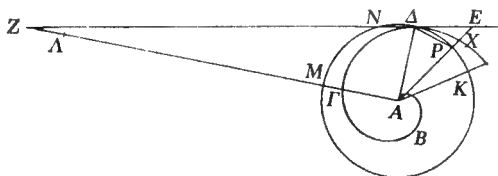


Fig. 19

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta$, décrite dans la première révolution, et soit EZ une tangente à la spirale au point Δ ; menons la droite $A\Delta$ joignant le point Δ à l'origine de la spirale, et autour de A comme centre et avec un rayon égal à $A\Delta$ décrivons le cercle ΔMN ; soit K le point d'intersection de ce cercle avec la droite origine de la révolution, et ZA la perpendiculaire sur $A\Delta$ en A . Que cette perpendiculaire rencontre (sc. la droite $Z\Delta$), cela est évident¹; ce qu'il faut démontrer, c'est que le segment de droite ZA est égal à l'arc de cercle $KMN\Delta$.

S'il ne lui est pas égal, en effet, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Donnons-nous un segment de droite AA qui soit inférieur au segment ZA , mais supérieur à l'arc de cercle $KMN\Delta$ ². Nous avons donc encore un cercle KMN , et dans le cercle une corde ΔN inférieure au diamètre, et le rapport de ΔA à AA est supérieur au rapport de la moitié de la corde ΔN à la perpendiculaire abaissée du point A sur cette corde; il est donc possible de mener de A vers le prolongement de $N\Delta$ la droite AE de manière que le rapport de EP à ΔP soit égal au rapport de ΔA à AA ; on a en effet démontré cette possibilité³; le segment EP sera, par conséquent, à AP , comme ΔP est à AA ⁴. Mais le rapport de ΔP à AA est inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à l'arc de cercle $KM\Delta$, puisque le segment de droite ΔP est inférieur à l'arc de cercle ΔP ,

1-4. Cf. notes compl.

et que le segment de droite AA est supérieur à l'arc de cercle KMA ; il s'ensuit que le rapport du segment EP à PA est inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à l'arc KMA , ce qui entraîne que le rapport de AE à AP est à son tour inférieur au rapport de l'arc de cercle KMP à l'arc KMA . Or le rapport de l'arc KMP à l'arc KMA est égal au rapport de XA à $A\Delta^1$; le rapport de EA à AP est, par conséquent, inférieur au rapport de AX à ΔA , ce qui est impossible². Le segment ZA n'est donc pas supérieur à l'arc de cercle KMA , et on démontrera comme précédemment qu'il ne lui est pas non plus inférieur ; il lui est donc égal.

Par les mêmes procédés on démontrera que, aussi dans le cas où une droite est tangente à une spirale décrite dans la seconde révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, mais où les autres constructions restent les mêmes, le segment de droite compris entre le point de rencontre avec la tangente et l'origine de la spirale est égal à la somme de la circonférence entière du cercle décrit et de l'arc compris entre les points indiqués³, cet arc étant pris de la même manière. De plus, si une droite est tangente à une spirale décrite dans n'importe quelle révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, les autres constructions restant les mêmes, le segment de droite compris entre les points indiqués est un multiple de la circonférence du cercle décrit d'après le nombre qui compte à une unité près les révolutions, augmenté de l'arc de cercle compris entre les points indiqués et pris de la même manière⁴.

1. Cf. prop. 14.

2. Puisque $AP = \Delta A$ et $EA > AX$; cf. Eucl. V, 8.

3. Cf. l'énoncé de la prop. 20.

4. Cf. prop. 15 et 17.

περιφερείας, ἃ δὲ ΑΛ μείζων τῆς ΚΜΔ περιφερείας ·
 ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἃ ΕΡ εὐθεία ποτὶ ΡΑ ἢ ἃ ΔΡ
 περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν · ὥστε καὶ ἃ ΑΕ
 ποτὶ ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἃ ΚΜΡ περιφέρεια ποτὶ
 5 τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἃ ΚΜΡ ποτὶ
 τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἃ ΧΑ ποτὶ ΑΔ ·
 ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἃ ΕΑ ποτὶ ΑΡ ἢ ἃ ΑΧ ποτὶ
 ΔΑ · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἃ ΖΑ τῆς
 ΚΜΔ περιφερείας. Ὅμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται
 10 ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν · ἴσα ἄρα.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τῆς
 ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης ἑλικος ἐπιψαύῃ
 εὐθεία μὴ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ
 κατασκευασθέντι, ὅτι ἃ μεταξὺ εὐθεία τῆς ποτὶ τὰν
 15 ἐπιψαύουσαν συμπτώσιος καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑλικος
 ἴσα ἐστὶν ὅλα τῇ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ
 καὶ ἔτι τῇ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων, ὡσαύτως
 τῆς περιφερείας λαμβανομένης · καὶ εἴ κα τῆς ἐν ὁποιαοῦν
 γεγραμμένης περιφορᾷ ἑλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεία μὴ
 20 κατὰ τὸ πέρας τῆς ἑλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασ-
 κευασθέντι, ὅτι ἃ μεταξὺ εὐθεία τῶν εἰρημένων σαμείων
 πολλαπλασία τίς ἐστι τῆς τοῦ γραφέντος κύκλου περι-
 φερείας κατὰ τὸν ἐνὶ ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ
 περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τῇ μεταξὺ τῶν εἰρημένων
 25 σαμείων ὁμοίως λαμβανομένα.

5 τὰν add. Heiberg || 7 ἃ alt. C : om. DEGH || 14 κατα-
 σκευασθέντι Torellius : κατασκευασθέντι codd. || 15 συμπτώσιος
 Heiberg : συμπίπτουσα CDEGH coincidentis B || τῆς ἀρχῆς
 CDEGH : principium B || 19 περιφορᾷ B : περιφορᾶς CDEGH
 || 23 ἐνὶ C : om. BDEGH || 25 λαμβανομένα Heiberg : λαμβα-
 νομένας CDEGH accepta periferia B.

21.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans la première révolution et la première droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre, les deux figures étant composées de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

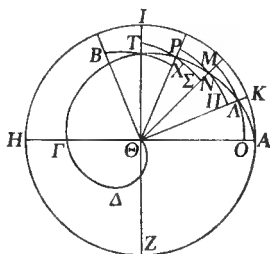


Fig. 20

Soit $AB\Gamma\Delta$ une spirale décrite dans la première révolution, Θ l'origine de la spirale, la droite ΘA l'origine de la révolution, $ZHIA$ le premier cercle, AH et ZI deux diamètres de ce cercle perpendiculaires l'un à l'autre. Si on divise maintenant continuellement l'angle droit et le secteur comprenant l'angle droit en deux parties égales, ce qui restera du secteur sera inférieur à toute aire donnée¹. Soit $A\Theta K$ le secteur devenu inférieur à l'aire donnée. Divisons alors les quatre angles droits en angles égaux à l'angle compris

1. Cf. Eucl. X, 1.

κα'.

Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς
 ἑλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς
 εὐθείας τῆς πρώτης ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς δυνατόν
 5 ἔστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι καὶ ἄλλο
 ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγε-
 γραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μείζον εἶμεν ἐλάσσονι
 παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

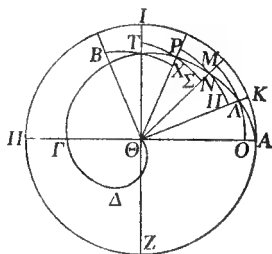


Fig. 20

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ $ΑΒΓΔ$, ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ
 10 γεγραμμένα, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τῆς ἑλικος τὸ $Θ$ σαμεῖον,
 ἀρχὰ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ $ΘΑ$, ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ
 $ΖΗΙΑ$, αἱ δὲ $ΑΗ$, $ΖΙ$ διαμέτροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις.
 Αἰ δὴ τῆς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένης καὶ τοῦ τομέως
 τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλει-
 15 πόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ
 ἔστω γεγεννημένος ὁ τομεὺς ὁ $ΑΘΚ$ ἐλάσσων τοῦ προτε-
 θέντος χωρίου. Διαιρήσθωσαν δὴ αἱ γωνίαι αἱ τέσσαρες
 ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν $ΑΘ$,

12 ἀλλάλαις DE : ἀλλήλαις GH || 17 δὴ αἱ G : δὴ οὖν DEH
 itaque B || 18 τῇ περιεχομένῃ Torellius : τῆς περιεχομένης codd.

entre $A\Theta$ et ΘK et prolongeons les droites formant ces angles jusqu'à la spirale. Soit A le point d'intersection de la droite ΘK et de la spirale ; autour de Θ comme centre décrivons un cercle de rayon ΘA . La partie de la circonférence de ce cercle située du côté de l'avant tombera à l'intérieur de la spirale, la partie située du côté de l'arrière tombera à l'extérieur. Décrivons donc la circonférence jusqu'à sa rencontre avec la droite ΘA et avec la droite qui tombe sur la spirale au-delà de la droite ΘK . Soit de nouveau N le point d'intersection de la droite ΘM et de la spirale. Autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘN décrivons un cercle jusqu'à la rencontre de sa circonférence avec la droite ΘK et avec la droite qui tombe sur la spirale au-delà de ΘM . Décrivons de même, autour de Θ comme centre, des circonférences passant par tous les autres points d'intersection de la spirale avec les droites faisant entre elles les angles égaux, jusqu'à la rencontre de chaque circonférence avec les droites de l'avant et de l'arrière. On aura ainsi une certaine figure circonscrite à l'aire qu'on s'est donnée, et une autre figure qui y est inscrite, les deux figures étant composées de secteurs semblables. Nous allons démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur (sc. peut être rendu inférieur) à toute aire donnée.

Le secteur $\Theta A O$ est en effet égal au secteur $\Theta M A$, le secteur $\Theta N \Pi$ égal au secteur $\Theta N P$, le secteur $\Theta X \Sigma$ au secteur $\Theta X T$, et chacun des autres secteurs dans la figure inscrite est égal à celui des secteurs dans la figure circonscrite qui a un côté commun (sc. avec lui). Il est donc évident que la somme des secteurs sera égale à la somme des secteurs. Par conséquent,

- ΘΚ, καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστε ποτὶ τὰν ἑλικά ἄχθωσαν. Καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἃ ΘΚ τὰν ἑλικά, ἔστω τὸ Λ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΛ κύκλος γεγράφθω · πεσεῖται δὲ αὐτοῦ ἃ μὲν εἰς τὰ προαγοῦμενα
- 5 περιφέρεια ἐντὸς τῆς ἑλικος, ἃ δὲ εἰς τὰ ἐπόμενα ἐκτός. Γεγράφθω δὴ ἃ περιφέρεια, ἔστε καὶ συμπέση τῇ ΘΑ [κατὰ τὸ Ο ἃ ΟΜ] καὶ τῇ μετὰ τὰν ΘΚ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπιπτούσα. Πάλιν δὴ καὶ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἑλικά σαμεῖον ἃ ΘΜ, ἔστω τὸ Ν, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, δια-
- 10 τήματι δὲ τῷ ΘΝ κύκλος γεγράφθω, ἔστε καὶ συμπέση ἃ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῇ ΘΚ καὶ τῇ μετὰ τὰν ΘΜ ποτιπιπτούσα ποτὶ τὰν ἑλικά, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἑλικά αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ Θ,
- 15 ἔστ' ἂν συμπέση ἐκάστα ἃ περιφέρεια τῇ τε προαγοιμένα εὐθεῖα καὶ τῇ ἐπομένῃ · ἐσσεῖται δὴ τι περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκεῖμενον καὶ ἄλλο ἐγγεραμμένον. Ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν ἐλάσσονι τοῦ
- 20 προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. Ἔστιν γὰρ ὁ μὲν ΘΛΟ τομεὺς ἴσος τῷ ΘΜΛ, ὁ δὲ ΘΝΠ τῷ ΘΝΡ, ὁ δὲ ΘΧΣ τῷ ΘΧΤ, ἔστιν δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομῇ τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. Δῆλον
- 25 οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ τομέες πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται ·

1 ἔστε ποτὶ Heiberg : ἐς τὴν κατὰ DEGH *equales per B* || 2 ἄχθωσαν G : ἀχθῶσιν DEH || 4 δὲ C : δι' DEH δὴ BG || προαγοῦμενα Heiberg : προαγόμενα DEH προαγεύμενα CG || 5 περιφέρεια BCG : περιφέρειαι DEH || 6 ἔστε κα Heiberg : ἔσται καὶ CDEH ἔστ' ἂν G et B || 7 κατὰ τὸ Ο ἃ ΟΜ codd. : del. Heiberg || 7-8 τὰν ἑλικά BDEGH : om. C || 10 ΘΝ mss. BCDG : ΘΗ ms. E, ΘΚΗ ms. H || ἔστε κα Heiberg : ἔσται καὶ CDEH ἔστ' ἂν G et B || 11 τῇ ΘΚ ms. G : om. BCDEH || 13 ἃ DEGH : ἂν C || 15 ἐκάστα B : ἐκάστας CDEH ἐκάστου G || προαγοιμένα Heiberg : προαγομένα DEH προαγευμένα CG || 19 μεῖζόν DEGH : μεῖζων C || 20 προτεθέντος DEGH : προτεθὲν C.

la figure inscrite dans l'aire est équivalente à la figure circonscrite à l'aire, au secteur ΘAK près, qui est le seul, en effet, des secteurs de la figure circonscrite qui n'ait pas été pris (sc. dans la comparaison avec les secteurs de la figure inscrite). Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est le secteur $AK\Theta$, qui est inférieur à une aire donnée¹.

COROLLAIRE

Il est évident, d'après ce que nous venons de voir, qu'il est possible de circonscrire à l'aire indiquée une figure telle que l'excès de la figure circonscrite sur cette aire soit inférieur à toute aire donnée, et, réciproquement, de lui inscrire une figure telle que l'excès de l'aire sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

22.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans la seconde révolution et la deuxième droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre (sc. les deux) composées de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

Soit $AB\Gamma\Delta E$ une spirale décrite dans la seconde révolution, le point Θ l'origine de la spirale, la droite $A\Theta$ l'origine de la révolution, EA la seconde droite à l'origine de la révolution, AZH le deuxième cercle, et AFH et ZI deux diamètres de ce cercle perpendi-

1. C'est-à-dire qui peut être rendu inférieur, par une subdivision prolongée des angles, à toute aire donnée.

ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ
 τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι χωρὶς τοῦ
 ΘΑΚ τομέως· ὁ μόνος γὰρ οὗτος οὐ λέλαπται τῶν ἐν τῷ
 περιγεγραμμένῳ σχήματι. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμ-
 5 μένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ΑΚΘ
 τομῇ, ὃς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν ἐστι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον
 χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν, ὥστε τὸ περιγεγραμ-
 10 μένον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς
 τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ
 χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος
 ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ'.

15 Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἑλικος
 τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας,
 ἧς ἐστὶ δευτέρα τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, δυνατόν
 ἐστὶ περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων
 τομέων συγκεείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περι-
 20 γραφέν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς
 τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ ΑΒΓΔΕ, ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ
 γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Θ σαρμείον ἀρχὰ τῆς ἑλικος,
 ἡ δὲ ΑΘ ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ ΕΑ ἡ δευτέρα εὐθεῖα
 25 τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΑΖΗ κύκλος ἔστω
 δεύτερος καὶ αἱ ΑΓΗ, ΖΙ διάμετροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς

3 οὐ add. Nizzius || λέλαπται BCDEH : λέλειπται G || 10
 ἐλάσσονι BG : ἐλασσον εἶμεν DEH || 15 ὑπὸ CDEH : ὑπό
 τε G.

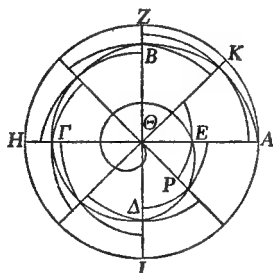


Fig. 21

culaires l'un à l'autre. Si maintenant l'angle droit et le secteur comprenant l'angle droit sont divisés (sc. continuellement) en deux parties égales, ce qui restera sera inférieur à l'aire donnée¹ ; soit ΘKA un secteur inférieur à l'aire donnée ; dès lors, si les angles droits sont divisés en angles égaux à l'angle $K\Theta A$, les autres constructions étant les mêmes que les précédentes, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera inférieur au secteur ΘKA , puisque cet excès sera égal à l'excédent du secteur ΘKA sur le secteur ΘEP .

COROLLAIRE

Il est donc évident qu'il est possible aussi que la figure circonscrite dépasse l'aire qu'on s'est donnée d'une aire inférieure à toute aire proposée et que l'aire qu'on s'est donnée dépasse à son tour la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire donnée.

Le même raisonnement rend claire aussi la proposition que voici : si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans n'importe quelle révolution

1. Cf. Eucl. X, 1.

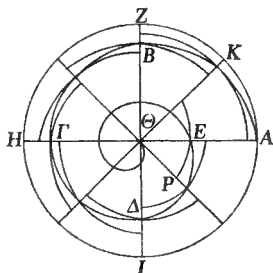


Fig. 21

ἀλλάλαις. Πάλιν οὖν δίχα τεμνομένης τᾶς ὀρθᾶς γωνίας
καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἔσσειται
τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω
γεγεννημένος ὁ ΘΚΑ τομεὺς ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος
5 χωρίου. Διαιρεθείσᾱν δὴ τὰν ὀρθὰν γωνιᾶν εἰς τὰς ἴσας
γωνίας τῇ ὑπὸ τὰν ΚΘΑ καὶ τῶν ἄλλων κατεσκευασθέντων
κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἔσσειται τὸ περιγεγραμμένον
σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μείζον ἐλάσσονι
ἢ ὁ τομεὺς ■ ΘΚΑ· μείζον γὰρ ἔσσειται τῇ ὑπεροχᾷ,
10 ᾧ ὑπερέχει ὁ ΘΚΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΡ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστιν καὶ τὸ περιγραφέν σχῆμα
τοῦ λαφθέντος χωρίου μείζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ
προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μείζον
15 εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ
προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν διότι δυνατόν
λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος

8 μείζον DEGH : μείζων C || 9 μείζον Torellius : μείζων
codd. || τῇ ὑπεροχᾷ B : ᾧ ὑπεροχᾷ CDEGH || 13 μείζον DEGH :
μείζων C.

et la droite à l'origine de la révolution désignée par le nombre des révolutions, il est possible de lui circonscrire une figure plane telle qu'elle a été indiquée, de manière que la figure circonscrite dépasse l'aire qu'on s'est donnée d'une aire inférieure à toute aire proposée, et d'y inscrire une autre figure, de manière que l'aire qu'on s'est donnée dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée.

23.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, et n'ayant pas d'extrémité à l'origine de la spirale, d'une part, et, d'autre part, les droites menées des extrémités de la spirale (sc. à l'origine de la spirale), il est possible de circonscrire à cette aire une figure plane et d'y inscrire une autre, les deux figures composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée.

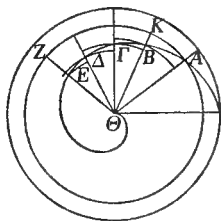


Fig. 22

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta E$, les points A et E ses extrémités, Θ son origine ; menons les droites $A\Theta$ et ΘE .

- τᾶς ἐν ὁποιοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας
 τᾶς ἐν τῇ ἀρχῇ τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν
 λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται, ἐπίπεδον,
 ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος
 5 χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ
 πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθέν χωρίον μείζον εἶμεν τοῦ
 ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος
 χωρίου.

κγ'.

- 10 Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος,
 ᾧ ἐστὶν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ
 ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος, καὶ τὰν εὐθειᾶν
 τὰν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑλικος ἀγομενᾶν δυνατόν ἐστι
 περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων
 15 τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφέν
 σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μείζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς
 τοῦ προτεθέντος χωρίου.

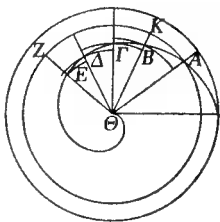


Fig. 22

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ **ΑΒΓΔΕ**, πέρας δὲ αὐτᾶς τὰ **Α, Ε**,
 ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἑλικος τὸ **Θ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΘ**,

4 ὥστε **BΓ** : ἔστω **CΔΕΗ** || 16 μείζον εἶμεν **BΔΕΓΗ** :
 μείζονι μὲν **C**.

Autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘA décrivons un cercle, et soit Z son point de rencontre avec la droite ΘE . Si on divise maintenant continuellement l'angle de sommet Θ et le secteur ΘAZ en deux parties égales, l'aire qui reste finira par être inférieure à l'aire proposée. Soit ΘAK un secteur inférieur à l'aire proposée. Décrivons, comme dans les démonstrations antérieures, des cercles passant par les points d'intersection de la spirale et des droites faisant les angles égaux de sommet Θ , de manière que chaque arc de cercle rencontre la droite à l'avant et la droite à l'arrière ; on aura donc une figure plane circonscrite à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et les droites $A\Theta$ et ΘE , et une autre figure qui y est inscrite, les deux figures étant composées de secteurs semblables, et l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à l'aire proposée, puisque le secteur ΘAK est inférieur à cette aire.

COROLLAIRE

Il est clair, d'après ce qui précède, qu'il est possible de circonscrire à l'aire indiquée une figure plane telle qu'elle vient d'être décrite, de manière que la figure circonscrite dépasse l'aire indiquée d'une aire inférieure à toute aire proposée, et d'y inscrire une autre figure plane, de manière que l'aire indiquée dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée¹.

24.

L'aire comprise entre la spirale décrite dans la première révolution et la première droite origine de

1. Cf. prop. 21, coroll.

- ΘΕ. Γεγράφθω δὴ κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι
 δὲ τῷ ΘΑ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Ἄει δὲ τὰς
 γωνίας τὰς ποτὶ τῷ Θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ ΘΑΖ δίχα
 τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος
 5 ἔλασσον. Ἐστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ ΘΑΚ τοῦ προτεθέντος.
 Ὅμοιως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν
 σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἑλικά αἱ τὰς ἴσας γωνίας
 ποιῶσαι ποτὶ τῷ Θ, ὥστε τὰν περιφερειᾶν ἐκάσταν
 συμπίπτειν τῇ τε προαγουμένῃ καὶ τῇ ἐπομένῃ · ἐσσεῖται
 10 δὴ τι περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τὰς ΑΒΓΔΕ
 ἑλικος καὶ τὰν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα
 ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεγραμ-
 μένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου
 ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου · ἐλάσσων
 15 γάρ ἐστιν ὁ ΘΑΚ τομεὺς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

- Ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν ὅτι δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ
 εἰρημένον χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περι-
 γράψαι, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ
 20 χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ
 πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μείζον εἶμεν
 τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτε-
 θέντος χωρίου.

κδ'.

- 25 Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τὰς ἑλικος τὰς ἐν τῇ
 πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τὰς εὐθείας τὰς πρώτας

2 Ζ. ἀεὶ BDEGH : ΖΑ. εἰ C || 3 τῷ Heiberg : τὸ codd. || 5
 ἔλασσον DEGH : ἐλάσσων C || 8 τῷ G : τῇ CDEH || ἐκάσταν
 Torellius : ἐκάστα CDEH ἐκάστας G || 10 περὶ add. Torellius ||
 14 ἐλάσσων CH : ἔλασσον DEG || 18 σχῆμα add. Heiberg ||
 20 καὶ — 23 χωρίου add. Rivalentus.

la révolution est équivalente à la troisième partie du premier cercle¹.

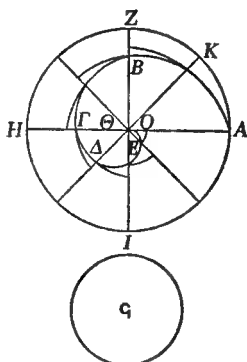


Fig. 23

Soit $AB\Gamma\Delta E\Theta$ une spirale décrite dans la première révolution, le point Θ l'origine de la spirale, ΘA la première droite origine de la révolution, et $AKZHI$ le premier cercle. Soit ς un cercle équivalent au tiers du premier cercle. Il faut démontrer que l'aire indiquée est équivalente au cercle ς .

En effet, si elle ne lui est pas équivalente, elle est ou bien supérieure ou bien inférieure à ce cercle. Qu'elle soit d'abord, si possible, inférieure. Il est donc possible de circonscrire à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E\Theta$ et la droite $A\Theta$ une figure plane, composée de secteurs semblables, telle que l'excès de la figure circonscrite sur cette aire soit inférieur à l'excès du cercle ς sur l'aire indiquée². Que cette figure soit donc circonscrite ; soit ΘAK le plus grand des secteurs dont la figure indiquée est composée, ΘEO le plus petit de ces secteurs.

1. Cf. un autre énoncé de cette proposition dans la lettre à Dosithée qui introduit ce traité, p. 11. Cette proposition est énoncée et démontrée aussi par Pappus, IV, 33.

2. Cf. prop. 21, coroll.

τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.

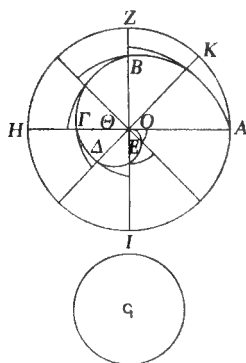


Fig. 23

Ἐστω ἑλὶξ, ἐφ' ἧς ἡ ἀ **ΑΒΓΔΕΘ**, ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν **Θ** σαμείον ἀρχὴ τῆς ἑλικος, 5 ἡ δὲ **ΘΑ** εὐθεΐα πρώτα τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ **ΑΚΖΗΙ** κύκλος πρώτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ ἐν **Ψ** **Ζ** κύκλος. Δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ **Ζ** κύκλῳ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. Ἐστω πρότερον, 10 εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Δυνατὸν δὲ ἐστὶν περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς **ΑΒΓΔΕΘ** ἑλικος καὶ τῆς **ΑΘ** εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα μείζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τῆς ὑπεροχᾶς, **ᾧ** ὑπερέχει ὁ **Ζ** 15 κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. Περιγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ **ΘΑΚ**, ἐλάχιστος δὲ ὁ **ΘΕΟ** · δῆλον οὖν

5 τῶν add. Heiberg || 6 AKZHI mss. BDEG : ANZHI mss. CH || ὁ alt. add. Heiberg || 13 συγκείμενον add. Torellius.

Il est donc évident que la figure circonscrite est inférieure au cercle ζ . Prolongeons les droites comprenant les angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a ainsi certains segments de droite, joignant le point Θ à la spirale, qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur et dont le plus grand est ΘA , le plus petit ΘE , ce dernier étant égal à leur différence (sc. à la différence entre deux segments consécutifs)¹. Mais il y a aussi d'autres segments de droite, joignant le point Θ à la circonférence du cercle, au même nombre que ceux que nous venons de dire, mais ayant chacun la même longueur que le plus grand de ceux-ci ; sur tous sont construits des secteurs semblables, aussi bien sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux entre eux et au plus grand (sc. des segments de droite inégaux). La somme des secteurs construits sur les segments égaux au segment le plus grand est donc inférieure au triple de la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur ; car cette propriété a été démontrée². Mais la somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au cercle $AZHI$, alors que la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant les uns les autres d'une même grandeur est égale à la figure circonscrite. Mais ce cercle est le triple³ du cercle ζ . Le cercle ζ est donc inférieur à la figure circonscrite. Or il n'est pas inférieur, mais supérieur à cette figure. Par conséquent, l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E\Theta$ et la droite $A\Theta$ n'est pas inférieure au cercle ζ .

Mais elle n'est pas non plus supérieure à ce cercle. Qu'elle le soit, si possible. Il est donc de nouveau possible d'inscrire dans l'aire comprise entre la spirale

1. Cf. prop. 12.

2. Cf. prop. 10, coroll.

3. Par hypothèse.

- ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ **Ζ** κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποτὶ τῷ **Θ** ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι · ἐντὶ δὴ τινες γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ
- 5 **Θ** ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπέρ-
χουσαι, ἂν ἐστὶ μέγιστα μὲν ἡ **ΘΑ**, ἐλαχίστα δὲ ἡ **ΘΕ**,
καὶ ἡ ἐλαχίστα ἴσα τῇ ὑπεροχῇ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς
γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ **Θ** ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν
ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει
- 10 ἐκάστα ἴσα τῇ μέγιστῃ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασῶν
ὁμοῖοι τομέες, ἀπὸ τε τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερεχουσῶν
καὶ ἀπὸ τὰν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μέγιστῃ · οἱ ἄρα
τομέες οἱ ἀπὸ τὰν ἰσῶν τῇ μέγιστῃ ἐλάσσονές ἐντι ἢ
τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν
- 15 ὑπερεχουσῶν · δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες
οἱ ἀπὸ τὰν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μέγιστῃ ἴσοι τῷ
AZHI κύκλῳ, οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν
ὑπερεχουσῶν ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι · ἐλάσσων
ἄρα ὁ **AZHI** κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἢ
- 20 τριπλασίων. Τοῦ δὲ **Ζ** κύκλου τριπλασίων · ἐλάσσων
ἄρα ὁ **Ζ** κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ
ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων · οὐκ ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον
χωρίον ὑπὸ τε τῆς **ΑΒΓΔΕΘ** ἑλικος καὶ τῆς **ΑΘ** ἔλασσον
τοῦ **Ζ** χωρίου.
- 25 Οὐδὲ τοίνυν μείζων. Ἐστω γάρ, εἰ δυνατόν, μείζων.
Ἔστι δὴ πάλιν δυνατόν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον

2 δὴ Heiberg : δὲ codd. || αἱ εὐθεῖαι αἱ Torellius et Heiberg :
εὐθεῖαι codd. || τῷ Heiberg : τὸ codd. || 4 αἱ add. Heiberg ||
6 μέγιστα Heiberg : μείζων codd. || ἐλαχίστα Heiberg :
ἐλάσσων codd. || 8 αἱ add. Heiberg || 10 ἀναγεγράφαται Heiberg :
ἀναγέγραπται codd. || 14 ἀλλαλὰν CGH : ἀλλαλα DE || 18
περιγεγραμμένῳ BDEGH : προγεγραμμένῳ C || 19 AZHI Heiberg :
AZHIK mss. CDEGH, akzhi ms. B || 23 ἐλάσσων
DEGH : ἐλάσσων C || 24 χωρίου BCDEH : κύκλου G.

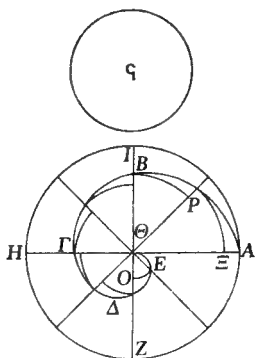


Fig. 24

$AB\Gamma\Delta E\Theta$ et la droite $A\Theta$ une figure telle que l'excès de l'aire indiquée sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès de l'aire indiquée sur le cercle ς^1 . Que la figure soit donc inscrite. Soit $\Theta P\Xi$ le plus grand et $O\Theta E$ le plus petit des secteurs dont est composée la figure inscrite. Il est ainsi évident que la figure inscrite est supérieure au cercle ς . Que les droites comprenant les angles égaux de sommet Θ soient prolongées jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a donc de nouveau certains segments de droite, menés du point Θ à la spirale², qui se dépassent les uns les autres d'une même grandeur et dont le plus grand est ΘA , le plus petit ΘE , ce dernier étant égal à leur différence. Mais il y a aussi d'autres segments de droite, joignant le point Θ à la circonférence du cercle $AZHI$, au même nombre que ceux que nous venons de dire, mais de même longueur, chacun, que le plus grand

1. Cf. prop. 21, coroll.

2. Cf. prop. 12.

de ceux-ci ; sur tous ces segments de droite sont construits des secteurs semblables, aussi bien sur ceux qui sont égaux entre eux et au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur. La somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux au plus grand est donc supérieure au triple de la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, au secteur près qui est construit sur le plus grand segment ; car cette propriété a été démontrée¹. Or la somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux au plus grand est équivalente au cercle AZHI, alors que la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur est équivalente à la figure inscrite, au secteur près qui est construit sur le plus grand des segments de droite. Il s'ensuit que le cercle AZHI est supérieur au triple de la figure inscrite. Mais ce cercle est équivalent au triple du cercle ς . Le cercle ς est donc supérieur à la figure inscrite ; or il n'est pas supérieur, mais inférieur. Par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔΕΘ et la droite AΘ n'est pas non plus supérieure au cercle ς ; elle lui est donc équivalente.

25.

Le rapport de l'aire, comprise entre une spirale décrite dans la deuxième révolution et la deuxième droite origine de la révolution, au deuxième cercle est égal au rapport de 7 à 12, qui est aussi le rapport entre la somme du rectangle, compris entre le rayon du deuxième et le rayon du premier cercle, et du tiers du carré sur l'excédent du rayon du deuxième cercle sur le rayon du premier cercle, d'une part, et, d'autre part, le carré sur le rayon du deuxième cercle.

1. Cf. prop. 10, coroll.

- τῇ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγράφαι ἀπὸ πασῶν ὁμοῖοι τομέες ἀπὸ τε τῶν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ καὶ ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλᾳν ὑπερεχουσῶν · οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τῇ μεγίστῃ μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν
 5 τομέων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλᾳν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας · δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τῇ μεγίστῃ ἴσοι τῷ ΑΖΗ κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλᾳν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ·
 10 μείζων ἄρα ὁ ΑΖΗ κύκλος ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ Ψ κύκλου τριπλασίων · μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ Ψ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων · οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μείζων τὸ χωρίον τὸ ὑπὸ τε τῆς ΑΒΓΔΕΘ ἑλικος καὶ τῆς ΑΘ
 15 εὐθείας τοῦ Ψ κύκλου. Ἴσον ἄρα ἐστὶν [τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τῆς ἑλικος καὶ τῆς ΑΘ εὐθείας].

κε'.

- Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς
 20 δευτέρας τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ ποτὶ τὰ ιβ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου καὶ τὸ τρίτον
 25 μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἂ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου.

4 ἐντι BDEGH : ἐν τε C || 9 ἀπὸ BG : ὑπὸ CDEH || 11 δὲ om. C || 14 ΑΒΓΔΕΘ ms. B : ΑΒΗΕΘ mss. CDEGH || 15 ἴσον BDEGH : ἴσος C || 18 περιλαφθὲν add. Heiberg || 23 δευτέρου Heiberg : β codd. || 24 πρώτου Heiberg : α codd. || 26 δευτέρου Heiberg : β codd. || 27 πρώτου Heiberg : α codd. || 28 δευτέρου Heiberg : β codd.

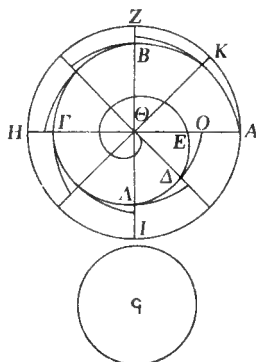


Fig. 25

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta E$ décrite dans la deuxième révolution, le point Θ l'origine de la spirale, ΘE la première droite origine de la révolution, AE la deuxième droite origine de la révolution, $AZHI$ le deuxième cercle, et AH et IZ deux diamètres (sc. de ce cercle) perpendiculaires l'un à l'autre. Il faut démontrer que l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et la droite AE est au cercle $AZHI$ dans le rapport de 7 à 12.

Soit un cercle ς tel que le carré sur son rayon soit équivalent à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur AE ; le rapport du cercle ς au cercle $AHZI$ sera alors égal au rapport de 7 à 12, puisque le rapport du carré sur le rayon de ς au carré sur le rayon du cercle $AZHI$ est lui aussi égal à ce rapport¹ (sc. de 7 à 12). Nous allons donc montrer que le cercle ς est équivalent à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et la droite AE .

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Il est donc possible de circoncrire

1. Cf. Eucl. XII, 2.

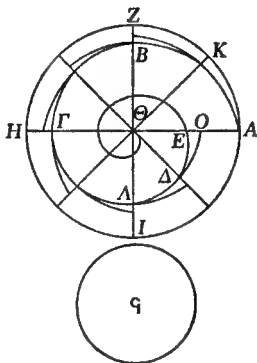


Fig. 25

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ $ΑΒΓΔΕ$, ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν $■$ σαμεῖον ἀρχὴ τῆς ἑλικος, ἡ δὲ $ΘΕ$ εὐθεῖα ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ἡ πρώτη, ἡ δὲ $ΑΕ$ ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ἡ δεύτερα, ὁ δὲ κύκλος ὁ $ΑΖΗΙ$ ὁ δεύτερος ἔστω, καὶ αἱ $ΑΗ$, $ΙΖ$ διαμέτροι ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις. Δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῆς $ΑΒΓΔΕ$ ἑλικος καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας ποτὶ τὸν $ΑΖΗΙ$ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ $\iota\beta$.

Ἐστω δὴ τις κύκλος ὁ Γ , ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Γ κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ τῶν $ΑΘ$, $ΘΕ$ περιεχομένῳ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ τετραγώνου· ἔξει δὴ ὁ Γ κύκλος ποτὶ τὸν $ΑΗΖΙ$ ὡς ζ ποτὶ $\iota\beta$, διότι καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $ΑΖΗΙ$ κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. Δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ Γ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τῆς $ΑΒΓΔΕ$ ἑλικος καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάττων. Ἐστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν δὲ ἐστὶ περὶ τὸ

à l'aire indiquée une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur l'aire soit inférieur à l'excès du cercle Θ sur l'aire¹. Que cette figure soit circonscrite ; soit ΘAK le plus grand, $\Theta O\Delta$ le plus petit des secteurs dont est composée la figure circonscrite ; il est dès lors évident que la figure circonscrite est inférieure au cercle. Prolongeons les droites qui font des angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec le deuxième cercle. Il y a donc des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur², à savoir les segments menés du point Θ à la spirale, dont le plus grand est ΘA et le plus petit ΘE , mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la circonférence du cercle $AZHI$ au même nombre, moins une unité, que les derniers et égaux en longueur entre eux et égaux au plus grand d'entre eux, et des secteurs semblables sont construits tant sur ceux qui sont égaux au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, alors qu'il n'y a pas de secteur construit sur le plus petit ; le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est donc inférieur au rapport du carré sur le plus grand segment ΘA à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EA , cette propriété ayant été démontrée³. Or la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au cercle $AZHI$, et la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est égale à la figure circonscrite ; il s'ensuit que le rapport du cercle (sc. $AZHI$) à la figure circonscrite est inférieur

1. Cf. prop. 22, coroll.

2. Cf. prop. 12.

3. Cf. prop. 11, coroll.

- χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων
 συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα μείζον εἶμεν
 τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπέρχει ἢ ὁ κύκλος τοῦ χωρίου.
 Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμ-
 5 μένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ τομεύς, ἐλάχιστος
 δὲ ὁ ΘΟΔ · δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγραφέν σχῆμα ἔλασσόν
 ἐστὶν τοῦ κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι
 ποτὶ τῷ Θ ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου
 κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. Ἐντὶ δὴ τινες γραμμαὶ
 10 τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἑλικά
 ποτιπίπτουσιν, ἂν ἐστί μεγίστα μὲν ἡ ΘΑ, ἐλαχίστα
 δὲ ἡ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν
 τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσιν, τῷ μὲν
 πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις
 15 τε ἴσαι καὶ τῇ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγράφονται ὁμοῖοι τομέες
 ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν
 ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς ἐλαχίστας οὐκ ἀναγράφεται ·
 οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τῇ μεγίστῃ ποτὶ τοὺς
 τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς
 20 τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ
 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμ-
 φότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον
 μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου · δέδεικται γὰρ τοῦτο.
 Ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομέεσσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις
 25 καὶ τῇ μεγίστῃ ἴσος ὁ ΑΖΗΙ κύκλος, τοῖς δὲ τομέεσσι τοῖς
 ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ
 τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα · ἐλάσσονα
 ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα

8 τῷ Heiberg : τὸ codd. || 11 ποτιπίπτουσιν G : ποτιπίπτουσιν
 BCDEH || 12 ποτὶ Heiberg : ἐπὶ codd. || 14 ἐλάσσονες C :
 ἐλάσσων DEH ἐλάσσους G || ταυτᾶν Heiberg : ἐαυτᾶν codd. || 17
 ἀναγράφεται DEH : ἀναγεγράφεται C ἀναγράφεται G || 19
 ἀλλαλᾶν CGH : ἀλλᾶν DE || 24 ἀλλάλαις EG : ἀλλάλας CDH
 || 25 ΑΖΗΙ mss. BCG : ΑΖΗ mss. DEH || 28 σχῆμα om. C.

au rapport du carré sur $A\Theta$ à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur AE . Mais le rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur AE est égal au rapport du cercle $AZHI$ au cercle ς^1 ; le rapport du cercle $AZHI$ à la figure circonscrite est donc inférieur à son rapport au cercle ς ; le cercle ς est, par conséquent, inférieur à la figure circonscrite². Mais il n'est pas inférieur, mais supérieur (sc. à cette figure); le cercle ς n'est donc pas supérieur à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et la droite AZ .

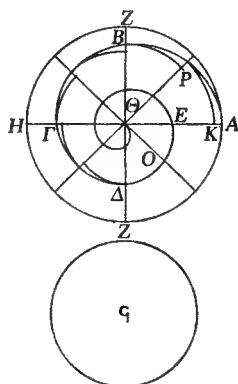


Fig. 26

Mais il ne lui est pas non plus inférieur. Qu'il le soit, en effet, si possible. Il est donc encore possible d'inscrire dans l'aire comprise entre la spirale et la droite AE une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et la droite AE sur la figure inscrite

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

2. Cf. Eucl. V, 10.

- ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς **ΑΘ** ποτὶ τὰ συναμφότερα
 τό τε ὑπὸ τᾶν **ΑΘ**, **ΘΕ** καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς
ΑΕ τετραγώνου. Ὃν δὲ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ
 τᾶς **ΘΑ** ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν **ΘΑ**, **ΘΕ** καὶ τὸ τρίτον μέρος
 5 τοῦ ἀπὸ τᾶς **ΑΕ** τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ **AZH** κύκλος
 ποτὶ τὸν **Ϛ** κύκλον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ **AZH**
 κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν **Ϛ**
 κύκλον· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ **Ϛ** κύκλος τοῦ περιγεγραμ-
 μένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα
 10 μείζων ἐστὶν ὁ **Ϛ** κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου
 ὑπὸ τε τᾶς **ΑΒΓΔΕ** ἑλικος καὶ τᾶς **AZ** εὐθείας.

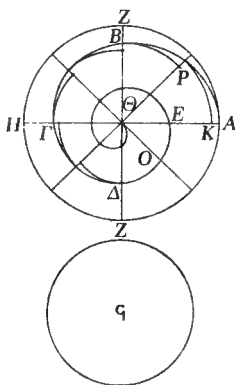


Fig. 26

- Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. Ἐστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων.
 Πάλιν οὖν δυνατόν ἐστὶν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον
 ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος καὶ τᾶς **ΑΕ** εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα
 15 ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ
 περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς **ΑΒΓΔΕ** ἑλικος καὶ τᾶς
ΑΕ εὐθείας μείζων εἴμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος

4 ΘΕ ms. B : ΑΕ mss. CDEGH || 17 μείζων εἴμεν BDEGH :
 μείζονι μὲν C.

soit inférieur à l'excès de la même aire sur le cercle ζ^1 . Que cette figure soit donc inscrite, et soit ΘKP le plus grand des secteurs dont elle est composée, et ΘEO le plus petit. Il est donc évident que la figure inscrite est supérieure au cercle ζ^2 . Prolongeons les droites faisant des angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a ainsi de nouveau des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la spirale³, le plus grand étant ΘA , le plus petit ΘE , mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés de Θ à la circonférence du cercle, dont le nombre est d'une unité plus petit que celui des premiers, et qui sont égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand; des secteurs semblables sont construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur ainsi que sur ceux qui sont égaux au plus grand; dès lors, le rapport de la somme des secteurs, construits sur les segments égaux au plus grand segment, à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus grand segment, est supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EA^4 . Or la somme des secteurs sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sans le secteur sur le plus grand segment, est égale à la figure inscrite dans l'aire, et la somme des autres secteurs est égale au cercle; il s'ensuit que le rapport du cercle $AZHI$ à la figure inscrite est supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur AE , c'est-à-dire au rapport du cercle $AZHI$ au cercle ζ^5 ; le cercle ζ est donc supérieur à la figure inscrite⁶, ce qui est impossible, du moment

1. Cf. prop. 22, coroll.

2. Cf. prop. 24.

3. Cf. prop. 19.

4-6. Cf. notes compl.

- ἐλάσσονι, ἣ ὧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ζ κύκλου. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΚΡ τομέως, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· δηλὸν οὖν ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον
- 5 σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιουσαι ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. Πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἔλικα ποτιπίπτουσαι, ἂν μέγιστα μὲν ἂ ΘΑ, ἐλάχιστα
- 10 δὲ ἂ ΘΕ, ἐντί δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ■ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστῃ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερεχουσᾶν ὁμοιοὶ τομέες καὶ ἀπὸ τὰν ἰσᾶν
- 15 τᾷ μεγίστῃ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τὰν ἰσᾶν τᾷ μεγίστῃ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μεῖζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον
- 20 τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. Ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλὰν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος· μεῖζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ
- 25 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου, τουτέστιν ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸν ζ κύκλον. Μεῖζων ἄρα ἐστὶν ὁ ζ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον·

3 ΘΚΡ mss. BCDEG : ΘΧΡ ms. H || 6 τῷ C : τὸ DEGH || 12 μιᾷ G : μίαν CDEH || ταυτᾶν Heiberg : ταύτη DEH ταύτα C αὐτᾶν G || 19 ὑπὸ Heiberg : ὑπὸ τε codd. || τρίτον CDEH : τρίτον μέρος G || 20 ἀπὸ BG : ὑπὸ CDEH || 24 ΑΖΗΙ mss. BDEGH : ΑΗΖΙ ms. C.

qu'il lui était inférieur. Le cercle \mathfrak{C} n'est donc pas non plus inférieur à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et la droite AE ; il lui est donc égal.

COROLLAIRE

On montrera par le même raisonnement que le rapport de l'aire comprise entre la spirale décrite dans n'importe quelle révolution et la droite désignée par le nombre des révolutions au cercle désigné par le même nombre des révolutions est égal au rapport de la somme du rectangle, ayant pour côtés le rayon du cercle désigné par ce même nombre et le rayon du cercle désigné par le nombre des révolutions diminué d'une unité, et du tiers du carré sur l'excédent, dont le rayon du plus grand des cercles indiqués dépasse le rayon du plus petit des cercles indiqués, au carré sur le rayon du plus grand des cercles indiqués.

26.

Le rapport de l'aire comprise entre une spirale, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, et n'ayant pas comme extrémité l'origine de la spirale, et les droites menées de ses extrémités à l'origine de la spirale au secteur ayant un rayon égal au plus grand des segments de droite menés des extrémités à l'origine de la spirale et un arc égal à l'arc compris entre les droites indiquées, du côté de la spirale, est égal au

ἦν γὰρ ἐλάσσων. Οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ 5 κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἑλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας ὥστε ἴσος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

- 5 Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένης ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς
 10 περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν ἐνὶ ἐλάσσονα τᾶν περιφορᾶν λεγομένου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ ὑπερέχει ἂ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
 15 μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τῶν εἰρημένων, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

κς'.

- 20 Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἑλικος, ἃ ἐστὶν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένης, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος, καὶ τὰν εὐθειᾶν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος ἀγμενᾶν ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν
 25 τᾷ μείζονι τὰν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἑλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν, ἃ ἐστὶ μεταξὺ τᾶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἑλικί, τοῦτον ἔχει

7 κατὰ Heiberg : ποτὶ codd. || 12 τοῦ alt. DEGH : τὸ C || τὸν ἐνὶ Heiberg : τὸ μὲν C μὲν ἐνὶ DEGH || 23 τῶν περάτων Torellius : τοῦ πέρατος codd. || 26 ἃ ἐστὶ Basil. : ἃ ἐστὶ τᾷ codd.

rapport de la somme du rectangle, ayant pour côtés les segments de droite menés des extrémités de la spirale à l'origine de la spirale, et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand des segments indiqués sur le plus petit, au carré sur le plus grand des segments menés des extrémités de la spirale à l'origine de la spirale.

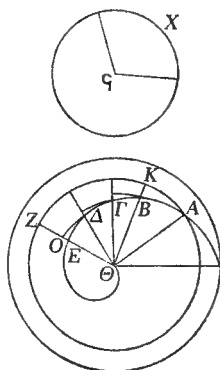


Fig. 27

Soit une spirale $AB\Gamma\Delta E$, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, A et E ses extrémités, et Θ l'origine de la spirale ; autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘA décrivons un cercle, et soit Z l'intersection de la circonférence de ce cercle avec la droite ΘE . Il faut démontrer que le rapport de l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et les droites $A\Theta$ et ΘE au secteur $A\Theta Z$ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EZ au carré sur ΘA .

τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε περιεχόμενον
 ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τῆς ἑλικος
 ἀγμενᾶν καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ
 τῆς ὑπεροχᾶς, ὅ ὑπερέχει ἅ μείζων τῶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν
 5 τῆς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος
 τῶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τῆς ἑλικος ἐπιζευχ-
 θεισᾶν.

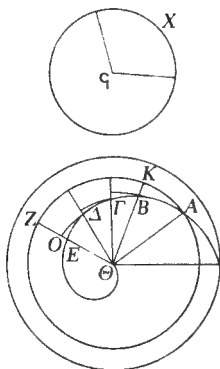


Fig. 27

Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἡ **ΑΒΓΔΕ**, ἐλάσσων τῆς ἐν μιᾷ
 περιφορᾷ γεγραμμένης, πέρατα δὲ αὐτῆς ἔστω τὰ **Α**,
 10 **Ε**, ἔστω δὲ ἀρχὴ τῆς ἑλικος τὸ **Θ** σαμεῖον, καὶ κέντρῳ
 μὲν τῷ **Θ**, διαστήματι δὲ τῷ **ΘΑ** κύκλος γεγράφθω, καὶ
 συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἡ **ΘΕ** κατὰ τὸ **Ζ**. Δεικτέον
 ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τῆς **ΑΒΓΔΕ** ἑλικος
 καὶ τῶν εὐθειᾶν τῶν **ΑΘ**, **ΘΕ** ποτὶ τὸν τομέα τὸν **ΑΘΖ** τοῦτον
 15 ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν **ΑΘ**,
ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** ποτὶ τὸ τετράγωνον
 τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΑ**.

2 ὑπὸ **DEGH** : ἀπὸ **C** || 3 ἀγμενᾶν **DEGH** : ἀγομενᾶν **C** ||
 11 τῷ pr. **CEG** : τὸ **DH** || τῷ alt. **CEG** : τὸ **DH**.

Soit donc un cercle ΨX tel que le carré sur son rayon soit équivalent à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EZ ; qu'il y ait dans ce cercle un angle au centre égal à l'angle de sommet Θ ; le secteur ΨX est alors au secteur ΘAZ comme la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EZ est au carré sur ΘA , puisque les carrés sur les rayons ont entre eux ce rapport. On démontrera donc que le secteur $X\Psi$ est équivalent à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et les droites $A\Theta$ et ΘE .

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Il est alors possible de circoncrire à l'aire indiquée une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur l'aire indiquée soit inférieur à l'excès du secteur ΨX sur l'aire indiquée¹. Que cette figure soit donc circonscrite, et soit ΘAK le plus grand des secteurs dont est composée la figure circonscrite, et $\Theta O\Delta$ le plus petit de ces secteurs ; il est dès lors évident que la figure circonscrite est inférieure² au secteur $X\Psi$. Menons les droites qui font les angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec l'arc du secteur ΘAZ . On a alors des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir les segments menés du point Θ à la spirale³, le plus grand étant ΘA , le plus petit ΘE , mais il y a aussi d'autres segments de droite, dont le nombre est égal à celui des premiers diminué d'une unité, égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand, à savoir les segments menés du point Θ à l'arc du secteur $A\Theta Z$, sauf le segment ΘZ , et des secteurs semblables sont construits sur tous ces

1. Cf. prop. 23, coroll.

2. Cf. prop. 24.

3. Cf. prop. 12.

Ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ΓΧ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΕ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τῇ ποτὶ τῷ Θ · ὁ δὲ τομεὺς ὁ ΓΧ ποτὶ τὸν τομέα τὸν ΘΑΖ
 5 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετράγωνον · αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. Δειχθήσεται δὴ ὁ ΧΣ τομεὺς ἴσος ἔων τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ
 10 τε τῆς ΑΒΓΔΕ ἑλικος καὶ τὰν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἢ ἐλάττων ἐστίν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν οὖν ἐστὶν περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μείζον
 15 εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ ΓΧ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. Περιγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ · δηλὸν οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΧΣ
 20 τομέως. Διάχθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ ΘΑΖ τομέως πέσωντι. Ἐντὶ δὲ τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσai, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιτίπτουσai, ἂν ἐστὶ μέγιστα μὲν ἡ ΘΑ, ἐλάχιστα δὲ ἡ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ
 25 ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΘΖ τομέως περιφέρειαν ποτιτίπτουσai χωρὶς τῆς ΘΖ, καὶ ἀναγεγράφαται ὁμοιοὶ τομέες

2 δυνάμει DEGH : δύνανμιν C || 11 ἐστίν add. Torellius || ἔστω C : ἔστω γὰρ BDEGH || 14-15 μείζον εἶμεν BDEGH : μείζονι μὲν C || 18 μέγιστος Heiberg : μείζων codd. || ἐλάχιστος Heiberg : ἐλάσσων codd. || 19 οὖν om. C || 20 αἱ pr. add. Heiberg || 21 τῷ G : τὸ CDEH || 25 τῷ μὲν DEGH : ἐν μὲν τῷ C || ἐλάσσονες Torellius : ἐλάσσων DEH ἐλάσσους G.

segments, tant sur ceux qui sont égaux entre eux et égaux au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf sur le segment ΘE ; dès lors, le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est inférieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘE et du tiers du carré sur EZ ¹. Or la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au secteur ΘAZ , et la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur est égale à la figure circonscrite; le rapport du secteur ΘAZ à la figure circonscrite est donc inférieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur ZE . Mais le rapport du carré sur ΘA à la somme indiquée est égal au rapport du secteur ΘAZ au secteur $X\zeta$; il s'ensuit que le secteur $X\zeta$ est inférieur à la figure circonscrite². Or il ne lui est pas inférieur, mais supérieur; le secteur $X\zeta$ ne sera donc pas supérieur à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et les droites $A\Theta$, ΘE .

Mais il ne lui est pas non plus inférieur. Qu'il le soit, en effet, et que les autres constructions restent les mêmes. Il est donc encore possible d'inscrire dans l'aire (sc. en question) une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de l'aire indiquée sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès de cette même aire sur le secteur $X\zeta$. Que cette figure soit donc inscrite, et soit $\Theta B\Gamma$ le plus grand, $\Theta\Theta E$ le plus petit des secteurs dont elle est composée;

1. Cf. prop. 11, coroll.

2. Cf. Eucl. V, 10.

- ἀπὸ πασάν, ἀπὸ τε τὰν ἰσάν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ
καὶ ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσάν, ἀπὸ δὲ τᾶς
ΘΕ οὐκ ἀναγέγραπται · τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τὰν ἰσάν
ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ
5 τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσάν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς
ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς
ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ
τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνου. Ἔστιν δὲ
τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τὰν ἰσάν ἀλλάλαις τε καὶ
10 τῇ μεγίστῃ ἴσος ■ ΘΑΖ τομεύς, τοῖς δὲ ἀπὸ τὰν τῷ
ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσάν τὸ περιγεγραμμένον · ἐλάσσονα
οὖν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεύς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον
σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμ-
φότερα τό τε ὑπὸ τὰν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ
15 ἀπὸ τᾶς ΖΕ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ
εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεύς ποτὶ τὸν
ΧΨ τομέα · ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΧΨ τομεύς τοῦ περι-
γεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων · οὐκ ἄρα
ἐσσεῖται ὁ ΧΨ τομεύς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου
20 ὑπὸ τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἑλικος καὶ τὰν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν.

- Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. Ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ
ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν
εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων
συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μείζον εἶμεν
25 τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει
τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ΧΨ τομέως. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ
ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον
σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ · δηλὸν

7 τό τε Heiberg : τά τε codd. || 14 τό τε CG : τῷ τε DEH
|| 17 ΧΨ pr. Torellius : X codd. || ΧΨ alt. Torellius : X codd. || 19
ΧΨ mss. BDEG : X ms. C || 24 μείζον εἶμεν BDEGH : μείζονι
μὲν τὸ C || 25 ἐλάσσονι BCG : ἐλασσον DEH || 26 ΧΨ mss.
BDEGH : X ms. C || 28 μέγιστος Heiberg : μείζων DEG μείζον
CH || ἐλάχιστος Heiberg : ἐλάσσων BDEGH ἐλασσον C || ΟΘΕ
Basil. : toe ms. B, ΘΕ mss. CDEGH.

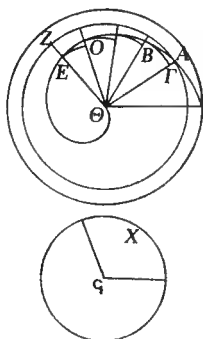


Fig. 28

il est dès lors évident que la figure inscrite est supérieure au secteur $X\Theta$. Nous avons donc de nouveau des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir les segments menés du point Θ à la spirale¹, le plus grand étant ΘA et le plus petit ΘE , mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la circonférence du secteur ΘAZ , sans le segment ΘA , d'une unité moins nombreux que les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, mais égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand, et sur chacun de ces segments sont construits des secteurs semblables, sauf sur le plus grand de ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur ; le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sans le secteur sur le plus grand segment, est donc supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur EZ ² ; par conséquent le rapport

1. Cf. prop. 12.

2. Cf. prop. 11, coroll.

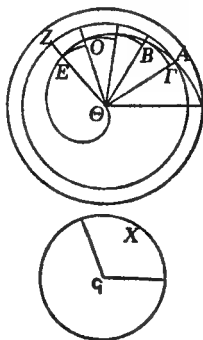


Fig. 28

οὖν ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον ἐστὶ τοῦ Χς
 τομέως. Πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν
 ὑπερέχουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἑλικά ποτιπίπτουσιν,
 ἂν ἐστὶ μέγιστα μὲν ἡ ΘΑ, ἐλάχιστα δὲ ἡ ΘΕ, ἐντί δὲ καὶ
 5 ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΘΑΖ τομέως
 περιφέρειαν ποτιπίπτουσιν χωρὶς τᾶς ΘΑ τῷ μὲν πλήθει
 μιᾷ ἐλάσσονες τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ
 μεγέθει ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ ἴσαι, καὶ ἀναγε-
 γράφεται ἀπὸ ἐκάστας ὁμοῖοι τομέες, ἀπὸ δὲ τᾶς μεγίστας
 10 τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν οὐκ ἀναγέγραπται·
 οἱ τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τὰν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τῇ μεγίστῃ
 ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τὰν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερε-
 χουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον
 ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν
 15 ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ· ὥστε καὶ

1 ἐγγεγραμμένον BCGE : γεγραμμένον DH || Χς Heiberg :
 X codd. || 3 αἱ add. Torellius || 5 αἱ add. Torellius || 7 μιᾷ CG :
 μιᾶς DEH || τῷ pr. CE : om. DGH || 8 ἀναγεγράφεται E :
 ἀναγεγράφεται CDGH || 9 τᾶς μεγίστας BCG : τὰν μεγιστᾶν
 DEH || 10 τὰν C : τῶν G om. DEH || 12 τῷ CG : om. DEH ||
 15 ΘΕ mss. BCG : ΑΕ mss. DEH || ὥστε CG : quia B ἔστω
 DEH.

du secteur ΘAZ à la figure inscrite est lui aussi supérieur à son rapport au secteur $X\varsigma$, d'où il suit que le secteur $X\varsigma$ est supérieur à la figure inscrite¹. Or il ne lui est pas supérieur, mais inférieur ; il s'ensuit que le secteur $X\varsigma$ n'est pas non plus inférieur à l'aire comprise entre la spirale $AB\Gamma\Delta E$ et les droites $A\Theta$ et ΘE ; il est donc équivalent à cette aire.

27.

Les aires comprises entre les spirales et les droites (sc. origines) de la révolution sont équivalentes, la troisième au double de la seconde, la quatrième au triple, la cinquième au quadruple, et les aires suivantes chaque fois à un multiple de la seconde aire suivant l'ordre des nombres, et la première aire est équivalente à la sixième partie de la seconde.

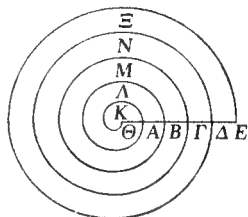


Fig. 29

Que la spirale proposée soit décrite dans la première, dans la deuxième et dans les révolutions suivantes aussi nombreuses que l'on voudra. Soit Θ l'origine de la spirale, ΘE la droite origine de la révolution. Soit K

1. Cf. Eucl. V, 10.

- ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ποτὶ τὸν ΧΨ τομέα · ὥστε μείζων ὁ ΧΨ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων · οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ΧΨ τομεὺς τοῦ
 5 περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τε τῆς ΑΒΓΔΕ ἑλίκος καὶ τῶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειῶν · ἴσος ἄρα.

κζ'.

- Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε τῶν ἐλίκων καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ περιφορᾷ τὸ μὲν τρίτον τοῦ δευτέρου
 10 διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ αἰεὶ τὸ ἐπόμενον κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ πρῶτον χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου.

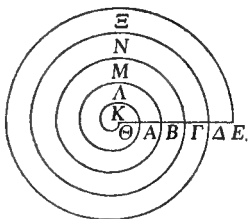


Fig. 29

- Ἐστω ἃ προκειμένα ἔλιξ ἔν τε τῇ πρώτῃ περιφορᾷ
 15 γεγραμμένα καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ καὶ ἐν ταῖς ἐπομέναις ὁποσαιοῦν, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τῆς ἑλίκος τὸ Θ σαρμεῖον, ἃ δὲ ΘΕ εὐθεῖα ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, τῶν δὲ χωρίων

2 ΧΨ pr. Heiberg : X codd. || ΧΨ alt. ms. C : X mss. BD EGH || 4 ΧΨ Heiberg : X codd. || 5 ΑΒΓΔΕ mss. BDEGH : ΑΒΓΔ ms. C || 6 ἴσος C : ἴσα BDEGH || 9 τρίτον Heiberg : ᾱ codd., et similiter in tota propositione || 14 προκειμένα BCGH : προκειμένω DE || 16 δὲ add. Heiberg.

la première des aires, Λ la seconde, M la troisième, N la quatrième, Ξ la cinquième. Il faut démontrer que l'aire K est équivalente à la sixième partie de l'aire suivante, que l'aire M est double de l'aire Λ , l'aire N triple de l'aire Λ , et que les aires suivantes sont chaque fois des multiples de l'aire Λ suivant l'ordre des nombres.

Voici comment on démontre que K est équivalent au sixième de Λ . Puisqu'il a été démontré que le rapport de la somme des aires K et Λ au second cercle est égal¹ au rapport de 7 à 12, que le second cercle est, comme cela est évident², au premier cercle comme 12 est à 3, et que le premier cercle est à l'aire K comme³ 3 est à 1, il en résulte que l'aire K est la sixième partie de l'aire Λ . D'autre part, il a été démontré⁴ que le rapport de la somme des aires K , Λ et M au troisième cercle est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $\Gamma\Theta$ et ΘB et du tiers du carré construit sur ΓB au carré sur $\Gamma\Theta$. Mais le troisième cercle est au deuxième comme le carré sur $\Gamma\Theta$ est au carré sur ΘB ⁵, et le deuxième cercle est à la somme des aires K et Λ comme le carré sur $B\Theta$ est à la somme du rectangle de côtés $B\Theta$ et ΘA et du tiers du carré sur AB ¹; il s'ensuit que le rapport de la somme des aires K , Λ et M à la somme des aires K et Λ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $\Gamma\Theta$ et ΘB et du tiers du carré sur ΓB à la somme du rectangle de côtés $B\Theta$ et ΘA et du tiers du carré⁶ sur AB . Or ces dernières grandeurs sont entre elles comme 19 est⁷ à 7, de façon que le rapport de la somme des aires K , Λ et M à la somme des aires Λ et K est égal au rapport de 19 à 7. Le rapport de l'aire M à la somme des aires K et Λ est ainsi égal au rapport⁸ de 12 à 7. Mais le rapport de la somme des aires K et Λ à l'aire Λ est égal au rapport de 7 à 6. Il est donc évident⁹ que l'aire M est double de l'aire Λ .

1. Cf. prop. 25.

2. Cf. Eucl. XII, 2.

3-9. Cf. notes compl.

ἔστω τὸ μὲν K τὸ πρῶτον, τὸ δὲ Λ τὸ δεύτερον, τὸ δὲ M τὸ τρίτον, τὸ δὲ N τὸ τέταρτον, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτον. Δεικτέον ὅτι τὸ μὲν K χωρίον ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ ἐπομένου, τὸ δὲ M διπλάσιον τοῦ Λ , τὸ δὲ N τριπλάσιον τοῦ Λ , καὶ
 5 τῶν ἐξῆς αἰὶ τὸ ἐπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς.

Ὅτι μὲν οὖν τὸ K ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ Λ , ὥδε δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ $ΚΛ$ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ ποτὶ τὰ $\overline{\iota\beta}$, ἡ δὲ
 10 δεύτερος κύκλος ποτὶ τὸν πρῶτον κύκλον ὡς $\overline{\iota\beta}$ ποτὶ τὰ $\overline{\gamma}$ · δηλὸν γάρ ἐστιν· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ποτὶ τὸ K χωρίον ἔχει ὡς $\overline{\gamma}$ ποτὶ $\overline{\alpha}$, ζ' ἄρα ἐστὶ τὸ K χωρίον τοῦ Λ . Πάλιν δὲ καὶ τὸ $ΚΛΜ$ χωρίον ποτὶ τὸν τρίτον κύκλον δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον
 15 τό τε ὑπὸ $ΓΘΒ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ $ΓΘ$ τετράγωνον. Ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον ὃν τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΘ$ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΒ$, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ $ΚΛ$ χωρίον ὃν τὸ ἀπὸ $ΒΘ$ τετράγωνον ποτὶ
 20 τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν $ΒΘ$, $ΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετραγώνου· καὶ τὸ $ΚΛΜ$ ἄρα ποτὶ τὸ $ΚΛ$ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΘ$, $ΘΒ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΒΘ$, $ΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετραγώνου. Ταῦτα
 25 δὲ ἔχει ποτὶ ἄλλαλα λόγον, ὃν $\overline{\iota\theta}$ ποτὶ τὰ ζ · ὥστε καὶ τὸ $ΚΛΜ$ χωρίον ποτὶ τὸ $ΛΚ$ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν $\overline{\iota\theta}$ ποτὶ τὰ ζ · αὐτὸ οὖν τὸ M ποτὶ τὸ $ΚΛ$ λόγον ἔχει, ὃν τὰ $\overline{\iota\beta}$ ποτὶ τὰ ζ . Τὸ δὲ $ΚΛ$ ποτὶ τὸ Λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ζ' · δηλὸν οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ M τοῦ Λ .

4 N τριπλάσιον BG : $\overline{\nu\gamma\pi}$ ms. E, $\overline{\eta\gamma\pi}$ mss. DH || 9 ἔχον Heiberg : ἔχειν codd. || 12 Λ ms. B : A mss. CDEGH || 21 καὶ — 24 τετραγώνου add. Commandinus et Heiberg || 29 οὖν ὅτι BG : ὅτι οὖν DEH.

Nous allons démontrer maintenant que les aires suivantes sont dans le rapport des nombres successifs. En effet, le rapport de la somme des aires K, Λ , M, N, Ξ au cercle de rayon ΘE est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $E\Theta$ et $\Theta\Delta$ et du tiers du carré sur ΔE au carré sur ΘE ¹. Mais le cercle de rayon ΘE est au cercle de rayon $\Theta\Delta$ comme le carré sur ΘE est au carré² sur $\Theta\Delta$, et le cercle de rayon $\Delta\Theta$ est à la somme des aires K, Λ , M et N comme le carré sur $\Theta\Delta$ est à la somme du rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Delta\Gamma$ ¹. Il s'ensuit que la somme des aires K, Λ , M, N, Ξ est à la somme des aires K, Λ , M, N comme la somme du rectangle de côtés ΘE et $\Theta\Delta$ et du tiers du carré sur ΔE est à la somme du rectangle de côtés $\Delta\Theta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Delta\Gamma$. Par dissociation³, l'aire Ξ est à la somme des aires K, Λ , M, N comme la différence entre la somme du rectangle de côtés $E\Theta$ et $\Theta\Delta$ et du tiers du carré sur $E\Delta$ et la somme du rectangle de côtés $\Delta\Theta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Gamma\Delta$ est à la somme du rectangle de côtés $\Delta\Theta$, $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Delta\Gamma$. Or la différence entre ces deux sommes est égale à la différence entre le rectangle de côtés ΘE et $\Theta\Delta$ et le rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et $\Theta\Gamma$, et cette différence n'est autre que le rectangle de côtés $\Delta\Theta$ et ΓE . Il s'ensuit que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires K, Λ , M, N est égal au rapport du rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et ΓE à la somme du rectangle de côtés $\Delta\Theta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Gamma\Delta$.

On démontrera de la même manière que le rapport de l'aire N à la somme des aires K, Λ , M est égal au rapport du rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et $B\Delta$ à la somme du rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et ΘB et du tiers du carré

1. Cf. prop. 25, coroll.

2. Cf. Eucl. XII, 2.

3. Procédé de transformation d'une proportion qui consiste à déduire de la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ la proportion $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; cf. Eucl. V, 17.

Ὅτι δὲ τὰ ἐπόμενα τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει,
 δειχθήσεται. Τὸ γὰρ ΚΑΜΝΞ ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶν
 ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΘΕ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει
 συναμφότερον τό τε ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΔ περιεχόμενον καὶ
 5 τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς ΘΕ τετράγωνον. Ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΘΔ,
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετράγωνον
 ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΔ τετράγωνον, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν
 10 ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΔΘ, ποτὶ τὸ ΚΑΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει
 τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΔ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμ-
 φότερα τό τε ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΔΓ τετραγώνου · καὶ τὸ ΚΑΜΝΞ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΑΜΝ
 λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΘΔ καὶ τὸ τρίτον μέρος
 15 τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον
 μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ · διελόντι καὶ τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ
 ΚΑΜΝ λόγον ἔχει, ὃν ἅ ὑπεροχὰ τοῦ τε ὑπὸ ΕΘ, ΘΔ μετὰ
 τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΘ,
 ΘΓ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ ποτὶ τε τὸ
 20 ὑπὸ τῶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ ·
 ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων ῶ καὶ τὸ
 ὑπὸ τῶν ΕΘΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΘΓ, ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν
 ΔΘ, ΓΕ · τὸ Ξ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΑΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ
 ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον
 25 μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν
 δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ ΚΑΜ χωρίον λόγον ἔχον
 τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὰ συναμφότερα
 τό τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΓΒ τετραγώνου ·

2 ΚΑΜΝΞ ms. B : ΗΚΑΜΝΞ mss. CDEGH || 10 ἐκ Hei-
 berg : ἀπὸ codd. || 13 ΔΓ — 15 τᾶς om. C || 15 ΔΘ ms. B :
 ΑΘ mss. CDEGH || 18 καὶ — 19 ΓΔ add. Torellius et Heiberg
 || 23 ὃν τὸ Basil. : ὃν τε DEH ὃν τε τὸ G || 28 τό τε G : τῷ τε
 DEH.

sur ΓB . L'aire N est donc à la somme des aires K, Λ, M, N comme le rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et $B\Delta$ est à la somme du rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et $B\Delta$, du rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et ΘB et du tiers du carré sur ΓB^1 , [et inversement]. Or cette dernière somme est équivalente à la somme du rectangle de côtés $\Delta\Theta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Gamma\Delta$. Du moment donc que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires K, Λ, M, N est égal au rapport du rectangle de côtés $\Theta\Delta, \Gamma E$ à la somme du rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Gamma\Delta$, et que le rapport de la somme des aires K, Λ, M, N à l'aire N est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré sur $\Delta\Gamma$ au rectangle² de côtés $\Theta\Gamma$ et ΔB , l'aire Ξ est à l'aire N comme le rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et ΓE est au rectangle³ de côtés $\Theta\Gamma$ et ΔB . Mais le rapport du rectangle de côtés $\Theta\Delta$ et ΓE au rectangle de côtés $\Theta\Gamma$ et ΔB est égal au rapport du segment de droite $\Theta\Delta$ au segment de droite $\Theta\Gamma$, puisque les segments de droite ΓE et $B\Delta$ sont égaux. Il est donc évident qu'à son tour le rapport de l'aire Ξ à l'aire N est égal au rapport de $\Theta\Delta$ à $\Theta\Gamma$.

On démontrera de la même manière que l'aire N est à l'aire M comme $\Theta\Gamma$ est à ΘB , et que l'aire M est à l'aire Λ comme $B\Theta$ est à $A\Theta$. Or les segments de droite $\Delta\Theta, \Gamma\Theta, B\Theta, A\Theta$ sont entre eux comme les nombres successifs.

28.

Si sur une spirale décrite dans n'importe quelle⁴ révolution on prend deux points qui ne sont pas ses extrémités, si des points ainsi pris on mène des droites à l'origine de la spirale, et si, autour de l'origine de la spirale comme centre et avec des rayons égaux aux distances des points pris à l'origine de la spirale, on

1-4. Cf. notes compl.

- τὸ Ν ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ [καὶ ἀνάπαλιν] · ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τῷ τρίτῳ
 5 μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου, τὸ δὲ ΚΛΜΝ ποτὶ τὸ Η ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ
 10 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ, ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ, ἐπεὶ ἴσαι
 15 ἐντὶ αἱ ΓΕ, ΒΔ · δηλὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ.

Ὅμοίως δὲ καὶ δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ Μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἂ ΘΓ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ τὸ Μ ποτὶ τὸ Λ, ὃν ἂ ΒΘ ποτὶ τὰν ΑΘ · αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ
 20 εὐθεῖαι τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

κη'.

- Εἰ κα ἐπὶ τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέωντι μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σαμείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν
 25 ἀρχὰν τᾶς ἑλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τῇ ἀρχῇ τᾶς ἑλικος, διαστημάτεσσι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σαμείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν

2 ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ add. Commandinus et Heiberg || 3 καὶ ἀνάπαλιν codd. : del. Heiberg || 7 τό EG : τῷ DH || 11 τὸ pr. G : τὰ BDEH || τὰν BG : τὰ DEH || 12 ΘΔ mss. BCDG : ΘΑ mss. EH || 19 τὰν G : τὸν DEH || ΕΘ codd. : del. Heiberg || 20 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH || 26 τὰν ἀρχὰν G : τῇ ἀρχῇ DEH.

décrit des cercles, l'aire comprise entre le plus grand des arcs de cercle interceptés entre les droites, la spirale comprise entre les mêmes droites et le prolongement du (sc. plus petit) segment de droite sera à l'aire comprise entre le plus petit arc, la même spirale et la droite joignant leurs extrémités comme le rayon du plus petit cercle, augmenté des deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit cercle, est au rayon du plus petit cercle, augmenté du tiers du même excès.

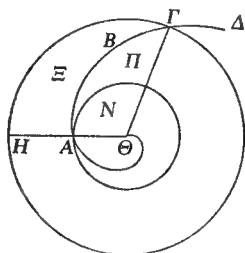


Fig. 30

Soit la spirale $AB\Gamma\Delta$ décrite dans une révolution ; prenons sur elle deux points A et Γ , de manière que l'origine de la spirale soit le point Θ ; menons des droites de A et de Γ au point Θ , et décrivons des cercles autour de Θ comme centre et avec des rayons égaux à ΘA et à $\Theta \Gamma$. Il faut démontrer que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est égal au rapport de la somme

- τῆς ἑλικος, κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον
 ὑπὸ τε τῆς μείζονος τῶν περιφερειῶν τῶν μεταξύ τῶν
 εὐθειῶν καὶ τῆς ἑλικος τῆς μεταξύ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν καὶ
 τῆς εὐθείας τῆς ἐκβληθείσας τοῦτον ἔξει τὸν λόγον ποτὶ
 5 τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἐλάσσονος περιφερείας
 καὶ τῆς αὐτῆς ἑλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνουσας
 τὰ πέρατα αὐτῶν, ὃν ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος
 κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τῆς ὑπεροχᾶς, ἧ ὑπερέχει
 ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
 10 τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
 ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἐνὸς τριταμορίου τῆς αὐτῆς
 ὑπεροχᾶς.

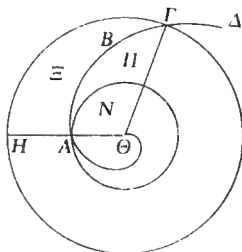


Fig. 30

- Ἐστω ἑλιξ, ἐφ' ἧς ἅ ΑΒΓΔ, ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα,
 καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σαμεῖα τὰ Α, Γ, ὥστε τὸ Θ
 15 σαμεῖον ἀρχὰν εἶμεν τῆς ἑλικος, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ
 ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστημάτεσσι
 δὲ τοῖς ΘΑ, ΘΓ, κύκλοι γεγράφθωσαν. Δεικτέον ὅτι τὸ
 Ξ χωρίον ποτὶ τὸ Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμ-

2 τῶν sec. Heiberg : τῆς codd. || 7 ἐλάσσονος add. Torellius ||
 10-11 ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου Basil. : ad
 illam quae ex centro maioris B om. DEGH || 15 τῶν Basil. :
 τῶν codd. || 16 τῷ EGH : τὸ D.

de $A\Theta$ et des deux tiers de HA à la somme de $A\Theta$ et d'un tiers de HA .

On a en effet démontré¹ que le rapport de la somme des aires N et Π au secteur $H\Gamma\Theta$ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $H\Theta$ et $A\Theta$ et du tiers du carré sur AH au carré sur $H\Theta$; le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires N et Π est donc égal² au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés $A\Theta$ et ΘH et du tiers du carré sur HA . Et comme le rapport de la somme des aires N et Π au secteur composé des aires N , Π , Ξ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘH et du tiers du carré sur HA au carré sur ΘH , et que le rapport du secteur $N\Pi\Xi$ au secteur N est égal au rapport du carré sur ΘH au carré sur ΘA , le rapport de la somme des aires N et Π au secteur N est à son tour égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘH et du tiers du carré sur HA au carré³ sur ΘA ; il s'ensuit que le rapport de la somme des aires N et Π à l'aire Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $H\Theta$ et ΘA et du tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés HA et ΘA et du tiers du carré⁴ sur HA . Du moment donc que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires N et Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés $H\Theta$ et ΘA et du tiers du carré sur HA , et que le rapport de la somme des aires N et Π à l'aire Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés $H\Theta$ et ΘA et du tiers du carré

1. Cf. prop. 26.

2. Cf. notes compl.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. Cf. Eucl. II, 3 et V, 19, coroll.

φότερος ἅ τε ΑΘ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε ΑΘ καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ΗΑ.

- Τὸ γὰρ χωρίον τὸ ΝΠ ποτὶ τὸν ΗΓΘ τομέα δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘ, ΑΘ
 5 καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΘ τετράγωνον· αὐτὸ ἄρα τὸ Ξ ποτὶ τὸ ΝΠ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ
 10 τᾶς ΗΑ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν ΝΠΞ τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ τετράγωνον, ὃ δὲ ΝΠΞ τομεὺς ποτὶ τὸν Ν τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ ποτὶ τὸ ἀπὸ
 15 τᾶς ΘΑ, ἔξει καὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΘΑ, ΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὸ ἄρα ΝΠ ποτὶ τὸ Π λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ
 20 συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΑ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΝΠ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΘΑΗ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘΑ καὶ τὸ
 25 τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ, τὸ δὲ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸ Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ

1 τε add. Heiberg || ΑΘ Heiberg : ΗΘ codd. || ΗΑ ms. B : H mss. DEGH || 2 ΑΘ Heiberg : ΗΘ codd. || ΗΑ ms. B : MA mss. DEGH || 4 ἔχον G : ἔχων DEH || 10 ΝΠΞ Torellius : ΝΗΞ codd. || 12 τᾶς G : τοῦ DEH || 13 ΝΠΞ Basil. : ΝΗΞ codd. || 15 Ν mss. DEH : Ν τομέα BG || 18 Π ms. B : ΠΑ mss. DEGH || συναμφότερα BDEH : συναμφότερον G || 19 ΗΑ ms. B : MA mss. DEGH || ποτὶ B : ποτὶ τὸ G om. DEH || 20 ΘΑ ms. B : ΘΕ mss. DEGH.

sur HA à la somme du rectangle de côtés HA et $A\Theta$ et du tiers du carré sur HA , le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π sera à son tour égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et du tiers du carré sur HA ¹. Or le rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et du tiers du carré sur HA est égal au rapport de la somme du segment de droite ΘA et des deux tiers du segment HA à la somme de ΘA et du tiers de HA ; il est donc évident que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est égal au rapport de la somme ΘA et des deux tiers de HA à la somme de ΘA et du tiers de HA .

1. Cf. Eucl. V, 22.

- τῶν ΗΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ τετραγώνου
 ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τῶν ΗΑΘ καὶ τὸ τρίτον
 μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ τετραγώνου, ἔξει καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ
 Π τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν
 5 ΘΑΗ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ ποτὶ συναμ-
 φότερον τό τε ὑπὸ τῶν ΘΑΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΗΑ. Τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τῶν ΘΑΗ καὶ δύο
 τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ
 τῶν ΘΑΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ τετραγώνου
 10 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ᾗ τε ΘΑ
 καὶ δύο τριταμόρια τῆς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε
 ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΗΑ · δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Ξ
 χωρίον ποτὶ τὸ Π χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν
 συναμφότερα ᾗ τε ΘΑ καὶ δύο τριταμόρια τῆς ΗΑ ποτὶ
 15 συναμφότερον τάν τε ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΗΑ.

5 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ codd. || 6 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ
 codd. || 7 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ codd. || 10 ΘΑ Basil. : ΘΗ
 codd. || 11 συναμφότερον Heiberg : συναμφοτέραν CDEGH
 συναμφότερα B || τε add. Heiberg || 12 ΘΑ Basil. : ΘΗ codd. ||
 13 Π Heiberg : Ν codd. || 14 ΘΑ Basil. : ΘΗ codd. || 15 συναμ-
 φότερον BCDEH : συναμφότερα G || τε add. Heiberg || ΘΑ
 Basil. : ΘΗ codd.

**DE L'ÉQUILIBRE
OU DES CENTRES DE GRAVITÉ
DES FIGURES PLANES
LIVRES I ET II**

NOTICE

Dans ce traité, où l'analyse mathématique est appliquée à la statique du levier, Archimède pose les fondements d'une nouvelle science exacte, appelée à un grand avenir, la mécanique rationnelle.

Les figures planes dont Archimède cherche à déterminer l'équilibre et les centres de gravité sont en réalité des corps solides aplatis, de densité homogène, assimilés à des figures planes. Le premier livre contient les propositions fondamentales de la statique : équilibre de poids égaux suspendus à des bras de levier égaux ; équilibre de poids inégaux suspendus à des bras de levier inégaux ; position du centre de gravité de la somme de deux ou de plusieurs grandeurs de même poids ; proportionnalité inverse de deux grandeurs inégales en équilibre aux distances de leurs points de suspension au point d'appui ; recherche des centres de gravité du parallélogramme, du triangle et du trapèze, par le découpage de ces figures en tranches parallèles. Le deuxième livre est entièrement consacré à la détermination du centre de gravité du segment de parabole par l'inscription « exacte » dans ce segment, d'une suite de triangles, c'est-à-dire par le procédé qui consiste à construire un premier triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole, à répéter cette construction dans les segments partiels découpés par les côtés du triangle, et ainsi de suite.

L'importance du traité *De l'équilibre des figures planes* pour les notions fondamentales de la statique

des corps solides lui a valu dans les temps modernes de nombreuses études et même des critiques. On a ainsi reproché à Archimède d'opérer dans ses démonstrations avec le centre de gravité des figures examinées sans en avoir présenté une définition. Cette omission peut s'expliquer par la connaissance de la réalité désignée par ce nom qu'Archimède était en droit de prêter à ses lecteurs, à la suite d'un de ses traités antérieurs, perdu aujourd'hui, ou par la diffusion que cette notion avait reçue par d'autres auteurs traitant de questions de mécanique. Une réserve plus grave a été formulée par l'historien de la mécanique E. Mach¹, qui reproche à Archimède d'admettre tacitement comme vraie la propriété qu'il entend démontrer dans la proposition 6 de ce traité, à savoir la loi de la proportionnalité inverse des poids et des distances dans l'équilibre entre des poids inégaux. Mais la critique de Mach méconnaît la portée des postulats placés par Archimède en tête du premier livre de ce traité, en particulier du postulat 6, sur la signification duquel O. Toeplitz² et W. Stein³ ont les premiers attiré l'attention. Dans sa pénétrante analyse du raisonnement d'Archimède, E. J. Dijksterhuis⁴ fait ressortir l'analogie qu'il y a entre le cinquième postulat d'Euclide et le 6^e postulat du traité *De l'équilibre des figures planes*, en montrant que la proposition 6 de ce traité est fondée sur le postulat 6 de la même manière que la proposition I, 27 d'Euclide est fondée sur le postulat des parallèles. Aujourd'hui, grâce à

1. E. Mach (1839-1916), *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, 7^e éd., Leipzig 1912, p. 14 sq.

2. dans ses entretiens et sa correspondance cités par E. J. Dijksterhuis; O. Toeplitz, théoricien de la connaissance mathématique du xx^e siècle, auteur d'études sur Archimède et ses représentations géométriques et mécaniques.

3. W. Stein, *Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*. Quellen und Studien zur Gesch. der Math., Phys. und Astron., B, I, 1930, pp. 221-244.

4. *Op. laud.*, p. 293 sq.

ces travaux, ce traité d'Archimède sur les fondements de la statique du levier est considéré comme un des grands textes de l'histoire des mathématiques appliquées.

Le texte de ce traité est établi d'après les manuscrits \mathcal{L} , D, E, G, H et les parties conservées, et lisibles, de C.

DE L'ÉQUILIBRE OU DES CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES PLANES, I

1. Nous demandons que les poids égaux s'équilibrent à des distances égales¹, et que les poids égaux suspendus à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais qu'il y ait inclinaison du côté du poids suspendu à la plus grande distance.

2. Si, des poids suspendus à certaines distances étant en équilibre, on ajoute à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids auquel on a ajouté.

3. De même, si on retranche quelque chose à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids, duquel on n'a rien retranché.

4. Dans les figures planes égales et semblables, superposables l'une à l'autre, les centres de gravité se superposent eux aussi l'un à l'autre.

5. Dans les figures planes inégales, mais semblables, les centres de gravité seront situés semblablement. Nous appelons semblablement situés dans des figures semblables des points tels que les droites qui les joignent aux sommets des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues.

6. Si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des grandeurs équivalentes à ces grandeurs s'équilibreront à leur tour aux mêmes distances.

7. Dans toute figure, dont le périmètre tourne

1. Cette première partie du postulat 1 est citée par Proclus, *In Eucl.* (ed. Friedlein), p. 181, 18.

ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α΄

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἥ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α΄

α΄. Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεια ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεια ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ
5 μείζονος μάκεος.

β΄. Εἴ κα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπὸ τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκείνο, ᾧ ποτετέθη.

γ΄. Ὅμοιως δὲ καί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἐτέρου τῶν βαρέων
10 ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος, ἀφ' οὗ οὐκ ἀφηρεῖται.

δ΄. Τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλλαλα.

15 ε΄. Τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. Ὅμοιως δὲ λέγομες σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιέοντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς.

20 ς΄. Εἴ κα μεγέθεα ἀπὸ τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει.

ζ΄. Παντὸς σχήματος, οὗ κα ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ

2 α' ceterique numeri Heiberg : om. codd. || 8 ἐκεῖνο G : ἐκείνω DEH || 11 ἀφ' GH : ἄφ' D ἐφ' E || 18 ποιέοντι Heiberg : ποιόντι E ποιῶντι DGH.

sa concavité du même côté¹, le centre de gravité doit être à l'intérieur de la figure.

Ces principes étant admis (sc. nous démontrerons les propositions)

1.

Les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux entre eux.

Si, en effet, les poids étaient inégaux, l'excès du plus grand ayant été retranché, les poids restants ne s'équilibreraient plus, puisqu'on aurait retranché quelque chose à l'un de deux poids en équilibre². Il s'ensuit³ que les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.

2.

Les poids inégaux suspendus à des distances égales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du plus grand.

Si on retranche, en effet, l'excédent, les poids s'équilibreront, puisque des poids égaux s'équilibrent à des distances égales⁴. En ajoutant, par conséquent, ce qui a été retranché, il y aura inclinaison du côté du plus grand, puisqu'on a ajouté à l'un de deux poids qui s'équilibrent⁵.

3.

Les poids inégaux s'équilibreront à des distances inégales, le plus grand poids se trouvant à la plus petite distance.

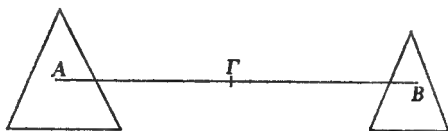


Fig. 31

αὐτὰ κοίλα ἤ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἶμεν δεῖ τοῦ σχήματος.

Τούτων \mathbf{B} ὑποκειμένων

α'.

5 Τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεια ἴσα ἐντί.

Εἵπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τῆς ὑπεροχᾶς τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἐτέρου ἀφήρηται. Ὡστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεια ἰσορροπέοντα ἴσα ἐντί.

10

β'.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεια οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μείζον.

Ἀφαιρεθείσας γὰρ τῆς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. Ποτιτε-
15 θέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μείζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἐτέρῳ ποτετέθη.

γ'.

Τὰ ἄνισα βάρεια ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ μείζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.



Fig. 31

Soit les poids inégaux A et B, A étant supérieur à B, et qu'ils s'équilibrent aux distances $A\Gamma$ et ΓB . Il faut démontrer que $A\Gamma$ est inférieur à ΓB .

Que $A\Gamma$ ne soit pas inférieur à ΓB . Retranchons l'excédent de A sur B. Puisqu'on a retranché quelque chose à l'un de deux poids qui s'équilibrent¹, il y aura inclinaison du côté (sc. de l'autre poids, à savoir) de B. Mais cette inclinaison ne se produira pas ; car si ΓA est égal à ΓB , les poids s'équilibreront², et si ΓA est supérieur à ΓB , il y aura inclinaison du côté de A, parce que les poids égaux à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du poids suspendu à la plus grande distance. Pour cette raison, $A\Gamma$ est inférieur à ΓB .

Il est évident aussi que les poids qui s'équilibrent à des distances inégales sont inégaux, et que le poids suspendu à la plus petite distance est le plus grand.

4.

Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant les centres de gravité des grandeurs.

Soit A le centre de gravité de la grandeur A, B celui de la grandeur B, et Γ le milieu du segment de droite AB ; je dis que Γ est le centre (sc. de gravité) de la grandeur composée des deux grandeurs.

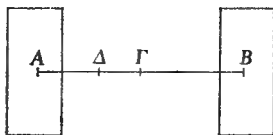


Fig. 32

1. Cf. post. 3.

2. Cf. post. 1.

"Εστω ἄνισα βάρεια τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μείζον τὸ Α, καὶ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μακέων. Δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ.

- Μὴ γὰρ ἔστω ἐλάσσων. Ἀφαιρεθείσας δὴ τῆς ὑπεροχᾶς,
 5 ἥ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ
 ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ Β. Οὐ ῥέψει δέ· εἴτε γὰρ
 ἴσα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΒ, ἰσορροπησοῦντι [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ
 τῶν ἴσων μακέων], εἴτε μείζων ἡ ΓΑ τῆς ΓΒ, ῥέπει ἐπὶ
 τὸ Α· τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορρο-
 10 πέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. Διὰ
 δὴ ταῦτα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ.

Φανερόν δὲ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορρο-
 πέοντα ἄνισά ἐντι, καὶ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

δ'.

- 15 Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους
 ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου
 μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ μέσον τῆς
 εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα
 τοῦ βάρους.
 20 "Εστω τοῦ μὲν Α κέντρον τοῦ βάρους τὸ Α, τοῦ δὲ
 Β τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ
 Γ· λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου
 μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Γ.

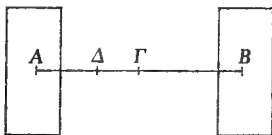


Fig. 32

4 δὴ Heiberg : δὲ DEGH χ || 10 ἐπὶ τὸ add. Torellius || 12 καὶ DEGH om. χ || 16 ἔχωντι G : ἔχοντι DEGH χ .

En effet, si Γ n'est pas (sc. ce centre de gravité), que le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs A et B soit le point Δ , si cela est possible ; on a, en effet, montré antérieurement que ce centre est situé sur la droite AB. Du moment donc que Δ est le centre de gravité de la grandeur composée de A et de B, (sc. cette grandeur) sera en équilibre si le point Δ est fixé ; par conséquent, les grandeurs A et B s'équilibreront aux distances $A\Delta$ et ΔB , ce qui est impossible¹, puisque les grandeurs égales ne s'équilibrent pas à des distances inégales. Il est donc évident que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs A et B.

5.

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont situés sur la même droite, si ces grandeurs ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres (sc. de gravité) sont égaux, le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des trois grandeurs sera le point qui est aussi le centre de gravité de la grandeur située au milieu.

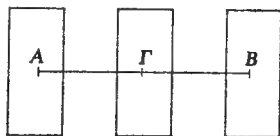


Fig. 33

Soient les trois grandeurs A, B, Γ , ayant pour centres de gravité les points alignés A, B, Γ ; que les grandeurs A, B, Γ soient égales entre elles, et que $A\Gamma$ soit égal à ΓB ; je dis que le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des (sc. trois) grandeurs est le point Γ .

Comme les grandeurs A et B ont en effet le même poids, le centre de gravité sera le point Γ , puisque

1. Cf. post. 1.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β μεγεθῶν] κέντρον τοῦ βάρους τὸ Δ, εἰ δυνατόν [ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς ΑΒ προδέδεικται]. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθους, 5 κατεχομένου τοῦ Δ ἰσορροπήσει· τὰ ἄρα Α, Β μεγέθη ἰσορροποῦνται ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μακέων· ὅπερ ἀδύνατον [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπεύονται]. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ Γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθους.

10

ε'.

Εἴ κα τριῶν μεγεθῶν τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἐπ' εὐθείας ἔωνται κείμενα, καὶ τὰ μεγέθη ἴσον βάρος ἔχωνται, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωνται, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν συγκειμένου μεγέθους κέντρον ἐσσεῖται 15 τοῦ βάρους τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

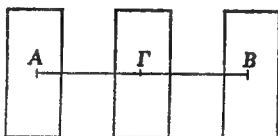


Fig. 33

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρους τὰ Α, Β, Γ σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἔστω δὲ τὰ τε Α, Β, Γ ἴσα καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω ὅτι 20 τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν συγκειμένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ Γ σαμεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Β μεγέθη ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ Γ σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ

5 τοῦ DEGHζ : τὸ Η || 7 ἰσορροπεύονται ΕΓ : ἰσορροπεύονται ΔΗ.

les segments de droite AF et FB sont égaux¹. Mais le point F est aussi centre de gravité de la grandeur F ; il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des trois grandeurs est le même point qui est aussi centre de gravité de la grandeur du milieu.

COROLLAIRE I

Il est clair d'après ce qui précède que pour toute quantité impaire de grandeurs dont les centres de gravité sont alignés et dont celles qui ont la même distance de celle du milieu ont le même poids et qui, de plus, sont disposées de manière que les segments de droite entre les centres de gravité des grandeurs sont égaux², le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le point qui est aussi centre de gravité de la grandeur du milieu.

COROLLAIRE II

Même lorsque les grandeurs sont en nombre pair, si leurs centres de gravité sont alignés, si les (sc. deux) grandeurs du milieu et celles qui sont équidistantes de celles du milieu ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres (sc. de gravité) sont égaux,

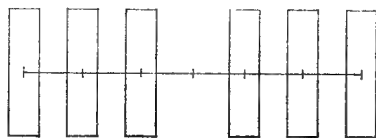


Fig. 34

le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant les centres de gravité des grandeurs, comme le montre la figure.

1. Cf. prop. 4.

2. Sc. de part et d'autre de la grandeur du milieu.

ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶν δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ σαμεῖον·
 δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους
 κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου
 κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

5

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ὅτι, ὁπόσων κα τῷ πλήθει
 περισσῶν μεγεθῶν τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἐπ' εὐθείας
 ἔωντι κείμενα, εἴ κα τὰ τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου
 μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξύ τῶν
 10 κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν
 συγκειμένου μεγέθους κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ
 σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'

Εἴ κα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ
 15 κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα,
 καὶ τὰ μέσα αὐτῶν καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν ἴσον
 βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξύ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι

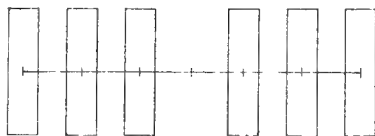


Fig. 34

ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν συγκειμένου μεγέθους
 κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς
 20 ἐπιζευγνουσας τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθῶν,
 ὡς ὑπογέγραπται.

2 οὖν G : om. DEH ζ || 9-10 τῶν κέντρων Torellius : τοῦ
 κέντρου codd. || 16 καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν add.
 Heiberg || 17 ἔχωντι G ζ : ἔχωντι DEH.

6.

Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids.

Soit les grandeurs commensurables A et B, A et B leurs centres (sc. de gravité) ; soit, de plus, une longueur $E\Delta$, et que la longueur $\Delta\Gamma$ soit à la longueur ΓE comme A est à B. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A et B est le point Γ .

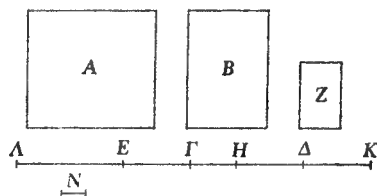


Fig. 35

Du moment, en effet, que $\Delta\Gamma$ est à ΓE comme A est à B, et que A et B sont commensurables, il s'ensuit que les deux segments de droite $\Gamma\Delta$ et ΓE sont à leur tour commensurables. Soit N leur commune mesure. Donnons-nous les deux segments de droite ΔH et ΔK égaux, chacun, à $E\Gamma$, et le segment de droite $E\Lambda$ égal à $\Delta\Gamma$. Puisque ΔH est égal à ΓE , $\Delta\Gamma$ est égal à EH , de manière que ΛE est aussi égal à EH . Par conséquent ΛH est double de $\Delta\Gamma$, et HK double de ΓE . Par conséquent N mesure aussi chacun des segments de droite ΛH et HK , puisque N mesure leurs moitiés¹. Et puisque, d'une part, $\Delta\Gamma$ est à ΓE comme A est à B, et que, d'autre part, ΛH est à HK comme $\Delta\Gamma$ est à ΓE , — chacun des premiers segments est en effet double de chacun des seconds —, le rapport de ΛH à

1. Cf. Eucl. X, 12.

ζ'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονηθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς βάρεσιν.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β,
5 καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β,
οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος · δεικτέον ὅτι τοῦ
ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκεκλιμένου μεγέθεος κέντρον
ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ Γ.

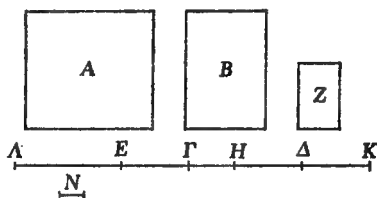


Fig. 35

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ
10 τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ
σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεία τῇ εὐθείᾳ · ὥστε τῶν ΕΓ,
ΓΔ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. Ἐστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τῇ
μὲν ΕΓ ἴσα ἑκάτερα τῶν ΔΗ, ΔΚ, τῇ δὲ ΔΓ ἴσα ἡ ΕΛ.
Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἡ ΔΗ τῇ ΓΕ, ἴσα καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΕΗ · ὥστε
15 καὶ ἡ ΛΕ ἴσα τῇ ΕΗ. Διπλασία ἄρα ἡ μὲν ΛΗ τῆς ΔΓ,
ἡ δὲ ΗΚ τῆς ΓΕ · ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκάτεραν τῶν ΛΗ, ΗΚ
μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν,
ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἡ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ ποτὶ
ΓΕ, οὕτως ἡ ΛΗ ποτὶ ΗΚ · διπλασία γὰρ ἑκάτερα ἑκάτερας ·

2 ἰσορροπέοντι ΕΓ : ἰσορροπέωντι ΔΗ || 2-3 ἀντιπεπονηθότως
Torellius : ἀντιπεπονηθότων codd. || 5 τι om. ζ || 16 καὶ om. ζ
| ἑκάτεραν Torellius : ἑκάτερας codd.

HK est lui aussi égal au rapport de A à B. Que A contienne autant de fois la grandeur Z que ΛH contient N. Il s'ensuit¹ que ΛH est à N comme A est à Z. Mais KH est aussi² à ΛH comme B est à A. Par identité³ donc, KH est à N comme B est à Z. Par conséquent, B est un multiple de Z autant de fois que KH est un multiple de N. Mais on a montré que A est lui aussi un multiple de Z, de façon que Z est une commune mesure de A et de B. Si maintenant le segment ΛH est divisé en parties égales à N, et la grandeur A en parties égales à Z, les segments égaux à N, contenus dans le segment ΛH , seront en même nombre que les grandeurs partielles, égales à Z, contenues dans la grandeur A. Par conséquent, si on place sur chacun des segments de ΛH une grandeur égale à Z ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs est égale à la grandeur A, et le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles sera le point E ; toutes ces grandeurs sont, en effet, en nombre pair, et il y en a le même nombre de part et d'autre de E, puisque le segment ΛE est égal au segment HE. On démontrera de la même manière que, même si sur chacun des segments partiels du segment KH on place une grandeur égale à Z, ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs partielles sera égale à B, et que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles sera le point Δ ⁴. La grandeur A sera donc placée au point E, la grandeur B au point Δ . On aura donc des grandeurs égales entre elles, dont les centres de gravité sont également distants entre eux et qui sont placées en nombre pair sur un segment de droite. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs est le milieu du

1. Cf. Eucl. V, def. 5.

2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. Du moment que Z mesure la grandeur B ; cf. prop. 5, coroll. 2.

καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἃ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. Ὅσα-
πλασίων δέ ἐστιν ἃ ΛΗ τᾷς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω
καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἃ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ
Α ποτὶ Ζ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἃ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β
5 ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἃ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β
ποτὶ Ζ· ἰσάκεις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἃ ΚΗ τᾷς Ν
καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον
ἓόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. Διαιρεθείσας
οὖν τᾷς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τῇ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ
10 ἴσα, τὰ ἐν τῇ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τῇ Ν ἴσα ἐσσεῖται
τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ.
Ὡστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τῇ ΛΗ
ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔχον
ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ
15 τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται
τοῦ βάρους τὸ Ε· ἄρτια τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει,
καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν
τὰν ΛΕ τῇ ΗΕ. Ὅμοιως δὲ δειχθήσεται ὅτι κἂν, εἴ κα
ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τῇ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος
20 ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρους ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ
τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ
τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται
τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ
δὲ Β κατὰ τὸ Δ. Ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις
25 ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἴσα
ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει·
δηλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος
κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἃ διχοτομία τᾷς εὐθείας τᾷς

1-2 ὅσαπλασίων δέ DEGH : et quotupla ζ || 6 ἰσάκεις
DEGH : quotiens ζ || 7 καὶ om. ζ || πολλαπλάσιον EGH :
πολλαπλασίων D || 9 τῇ Basil. : τῷ G om. DEH || τοῦ δὲ A
mss. DEGH et a ms. ζ || 10 ἴσα GH : ἴσου DE || 13 τῷ EG :
τὸ DH || 17 καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει add.
Heiberg || 26 συγκείμενα codd. : del. Heiberg.

segment de droite qui contient les centres des grandeurs du milieu¹. Mais puisque le segment de droite ΛE est égal au segment $\Gamma \Delta$, et le segment $E\Gamma$ égal au segment ΔK , le segment entier $\Lambda\Gamma$ est égal au segment ΓK . Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes les grandeurs partielles est le point Γ . Par conséquent, la grandeur A, placée au point E, et la grandeur B, placée au point Δ , s'équilibreront au point Γ .

7.

De la même manière aussi, si les grandeurs sont incommensurables, elles s'équilibreront à des distances inversement proportionnelles aux grandeurs.

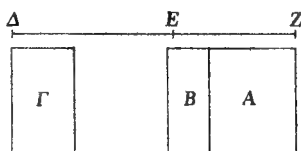


Fig. 36

Soient les grandeurs incommensurables AB et Γ et les distances ΔE et EZ ; que le rapport de AB à Γ soit égal au rapport de la distance $E\Delta$ à la distance EZ ; je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs² AB et Γ est le point E.

Car si AB, placé au point Z, ne fait pas équilibre à Γ , placé au point Δ , la grandeur AB sera ou bien trop grande par rapport à la grandeur Γ pour qu'il y ait équilibre, ou elle ne sera pas trop grande. Qu'elle soit trop grande, et que soit retranchée de AB une grandeur inférieure à cet excédent de AB sur Γ qui empêche l'équilibre et telle que la grandeur restante A soit commensurable avec Γ . Du moment donc que les grandeurs A et Γ sont commensurables, et que le

1. D'après prop. 5, coroll. 2.

2. Avec l'hypothèse sous-entendue que AB soit placé sur Z, et Γ sur Δ .

ἔχουσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθῶν. Ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τῇ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τῇ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τῇ ΓΚ · ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ σαμεῖον. Τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ
 5 Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

ζ'.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθη, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ μακῶν ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς μεγέθεσιν.

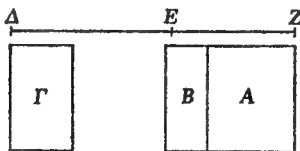


Fig. 36

- 10 Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, μάκεια δὲ τὰ ΔΕ, ΕΖ, ἔχτω δὲ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ΕΔ ποτὶ τὸ ΕΖ μάκος · λέγω δτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, Γ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ Ε.

- Εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσῃ τὸ ΑΒ τεθὲν ἐπὶ τῷ Ζ τῷ Γ τεθέντι
 15 ἐπὶ τῷ Δ, ἥτοι μείζον ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν [τῷ Γ] ἢ οὐ. Ἐστω μείζον, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε [τὸ] λοιπὸν τὸ Α σύμμετρον εἶμεν τῷ Γ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Γ μεγέθη,

8 ἀντιπεπονθότως Basil. : ἀντιπεπονθότων codd. || 15 τῷ Γ : τὸ ΔΕΗ || ἢ Γ : om. ΔΕΗζ || 16 τῷ Γ om. Eutocius || 17 μείζον Γ : μείζων ΔΕΗ || ἢ Γ : om. ΔΕΗζ || 18 τὸ pr. ΔΕΓΗ : om. Eutocius || 19 τῷ ΓΗζ : τὸ ΔΕ.

rapport de A à Γ est inférieur au rapport du segment de droite ΔE au segment EZ , les grandeurs A et Γ ne s'équilibreront pas¹ aux distances ΔE et EZ si la grandeur A est placée² au point Z et la grandeur Γ au point Δ . Pour les mêmes raisons, il n'y aura pas d'équilibre non plus, si la grandeur Γ est trop grande pour équilibrer la grandeur AB.

8.

Si on retranche d'une certaine grandeur une grandeur n'ayant pas le même centre (sc. de gravité) que le tout, le centre de gravité de la grandeur qui reste est l'extrémité du segment de droite découpé du prolongement, du côté du centre de la grandeur entière, de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, et découpé de manière que le rapport de ce segment au segment de droite entre les centres est égal au rapport du poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante³.

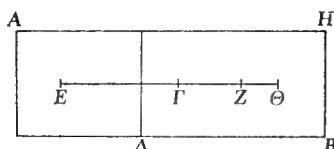


Fig. 37

Soit Γ le centre de gravité d'une grandeur AB ; retranchons de la grandeur AB la grandeur A Δ , et soit E le centre de gravité de A Δ ; menons la droite E Γ et retranchons de son prolongement (sc. vers Γ) le segment ΓZ de manière que le rapport de ΓZ à ΓE

1. Cf. prop. 6.

2. Du moment que $\frac{A}{\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$ il y a inclinaison du côté de Δ , ce qui est impossible, puisque la grandeur retranchée de AB est trop petite pour que le reste, c'est-à-dire A, puisse équilibrer Γ .

3. Proposition citée dans le traité *Des corps flottants*, II, 2.

καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ Γ ἢ ἂ ΔΕ ποτὶ ΕΖ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ Α, Γ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν Α ἐπὶ τῷ Ζ, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τῷ Δ. Διὰ ταῦτὰ δ', οὐδ' εἰ τὸ Γ μείζον ἐστὶν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ ΑΒ.

5

η'.

- Εἴ κα ἀπὸ τινος μεγέθους ἀφαιρεθῇ τι μέγεθος μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθους κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους, ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθους
 10 καὶ τοῦ ἀφηρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ᾗ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ [τᾶς] ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὰν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφηρημένου μεγέθους ποτὶ τὸ τοῦ
 15 λοιποῦ βάρους, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας.

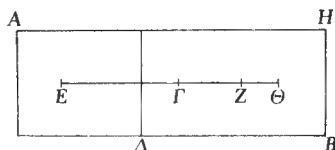


Fig. 37

Ἐστω μεγέθός τινος τοῦ ΑΒ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, οὗ κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ Ε, ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΕΓ καὶ ἐκβληθείσας ἀπολελάφθω ἡ ΓΖ ποτὶ τὰν ΓΕ λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν,

1 Γ ἢ ΓΖ : ΓΗ mss. DEH || 3 τῷ utr. Γ : τὸ DEH || ταῦτὰ DEGH : hoc ζ || 4 μείζον ἐστὶν DEGH : sit maius ζ || τῷ ΓΖ : τὸ DEH || AB Torellius : A codd. || 10 & Heiberg : δ codd. || 11 τᾶς DEGH : del. Heiberg || 14 τοῦ ἀφηρημένου μεγέθους ζ : τῶν ἀφηρημένων μεγεθέων DEGH.

soit égal au rapport de la grandeur $A\Delta$ à la grandeur ΔH ; il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur ΔH est le point Z .

En effet, que ce centre ne soit pas Z , mais le point Θ . Du moment donc que la grandeur $A\Delta$ a pour centre de gravité le point E , et la grandeur ΔH le point Θ , le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs $A\Delta$ et ΔH sera sur le segment de droite $E\Theta$, coupé de manière que ses segments partiels aient entre eux le rapport inverse des grandeurs¹ ; par conséquent² le point Γ ne sera pas situé à l'endroit que lui assigne la division correspondant à celle que nous venons d'indiquer. Le point Γ n'est donc pas le centre (sc. de gravité) de la grandeur composée des grandeurs $A\Delta$, ΔH , c'est-à-dire de la grandeur AB . Mais il l'est par hypothèse ; il s'ensuit que Θ n'est pas le centre de gravité de la grandeur ΔH .

9.

Dans tout parallélogramme le centre de gravité est situé sur la droite joignant les milieux des côtés opposés du parallélogramme.

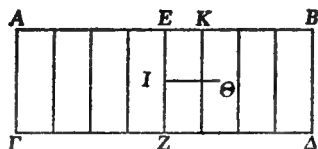


Fig. 38

Soit le parallélogramme $AB\Gamma\Delta$, et EZ la droite joignant les milieux des côtés AB et $\Gamma\Delta$. Je dis que le centre de gravité du parallélogramme $AB\Gamma\Delta$ sera situé sur la droite EZ .

1. Cf. prop. 6 et 7.

2. Cf. notes compl.

ὃν ἔχει τὸ **ΑΔ** μέγεθος ποτὶ τὸ **ΔΗ** · δεικτέον ὅτι τοῦ **ΔΗ** μέγεθος κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ **Ζ** σαμεῖον.

- Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ **■** σαμεῖον. Ἐπεὶ οὖν τοῦ **ΑΔ** μέγεθος κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ **Ε**,
 5 τοῦ δὲ **ΔΗ** τὸ **Θ** σαμεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ** μεγεθῶν κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς **ΕΘ** τμαθείσας, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν · ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ **Γ** σαμεῖον κατὰ τὴν ἀνάλογον τομὴν τῇ εἰρημένῃ.
 10 Οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ **Γ** κέντρον τοῦ ἐκ τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ** συγκεκλιμένου μεγέθους, τουτέστι τοῦ **ΑΒ**. Ἐστὶ δέ · ὑπέκειτο γάρ · οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ **■** κέντρον βάρους τοῦ **ΔΗ** μεγέθους.

θ'.

- Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους
 15 ἐστὶν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶν.

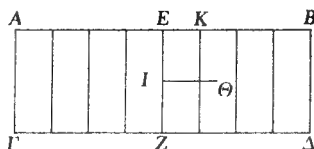


Fig. 38

- Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ **ΑΒΓΔ**, ἐπὶ δὲ τὴν διχοτομίαν τᾶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἡ **ΕΖ** · φανί δὴ ὅτι τοῦ **ΑΒΓΔ** παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται
 20 ἐπὶ τᾶς **ΕΖ**.

5 ἀμφοτέρων GZ : ἀμφοτέρου DEH || 7 αὐτᾶς $DEGH$: om. Z || ἀντιπεπονθέμεν Heiberg : ἀντιπεποθεν μὲν DH ἀντιπέπονθε μὲν EG || 16 τᾶν Torellius : τᾶς codd. || πλευρᾶν Torellius : πλευρᾶς codd.

Qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit, si possible, le point Θ . Menons la droite ΘI parallèlement à AB . Le segment de droite EB étant continuellement divisé en deux parties égales, il arrivera un moment où le segment restant sera inférieur à $I\Theta$. Que chacun des deux segments de droite AE et EB soit divisé en segments partiels égaux au segment EK (sc. inférieur à $I\Theta$). Menons par les points de division les parallèles à EZ . Le parallélogramme entier sera ainsi divisé en parallélogrammes égaux et semblables au parallélogramme KZ . Ces parallélogrammes égaux et semblables à KZ s'appliquant l'un sur l'autre, leurs centres de gravité coïncideront à leur tour¹. Il y aura donc : certaines grandeurs, des parallélogrammes égaux à KZ , en nombre pair ; leurs centres de gravité situés sur une droite ; les grandeurs du milieu égales. Toutes les grandeurs, de plus, de part et d'autre des grandeurs du milieu, sont égales, et les segments de droite compris entre les centres sont égaux. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de tous ces parallélogrammes sera situé sur la droite joignant les centres de gravité des aires du milieu². Mais ceci n'est pas le cas, puisque le point Θ est situé en dehors des parallélogrammes du milieu³. Il est donc évident que le centre de gravité du parallélogramme $AB\Gamma\Delta$ est situé sur la droite EZ .

10.

Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales.

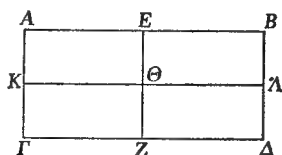


Fig. 39

- Μή γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἡ ΘΙ. Τῆς [δὲ] δὴ ΕΒ διχοτομουμένης αἰεὶ ἐσσεῖται ποκα ἡ καταλειπομένη ἐλάσσων τῆς ΙΘ · καὶ διηγήσθω ἐκάτερα τὰν ΑΕ, ΕΒ εἰς τὰς τῇ ΕΚ ἴσας, καὶ ἀπὸ τῶν
- 5 κατὰ τὰς διαιρέσεις σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΕΖ · διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὁμοῖα τῷ ΚΖ. Τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ ΚΖ ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν
- 10 ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. Ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα, παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΚΖ, ἄρτια τῷ πλήθει, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα, καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἐκάτερα τῶν μέσων αὐτά τε ἴσα ἐντὶ καὶ αἱ μεταξύ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι · τοῦ ἐκ
- 15 πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μέσων χωρίων. Οὐκ ἔστι δέ · τὸ γὰρ Θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. Φανερόν οὖν ὅτι ἐπὶ τῆς ΕΖ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους
- 20 τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου.

ι'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπέπτοντι.

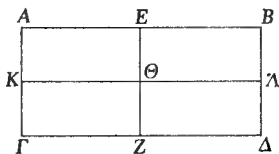


Fig. 39

2 δὲ DEGH : om. \propto del. Heiberg || 3 ποκα Torellius : ποια codd. || ἡ Γ : om. DEH \propto || 8-9 ἐφαρμοζομένων G \propto : ἐφαρμοζόμενον DEH || 9 αὐτῶν G \propto : αὐτοῦ DEH.

Soit le parallélogramme $AB\Gamma\Delta$, et dans ce parallélogramme la droite EZ divisant les côtés AB et $\Gamma\Delta$ en deux parties égales, et la droite $K\Lambda$ divisant les côtés $A\Gamma$ et $B\Delta$. Le centre de gravité du parallélogramme $AB\Gamma\Delta$ est donc situé sur la droite EZ , puisque cela a été démontré¹. Mais pour les mêmes raisons il est aussi situé sur la droite $K\Lambda$. Il s'ensuit que le point Θ est le centre de gravité. Or c'est au point Θ que se rencontrent les diagonales du parallélogramme, de façon que la proposition est démontrée.

AUTRE DÉMONSTRATION

Mais il est possible de démontrer la même proposition encore d'une autre manière.

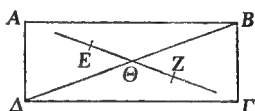


Fig. 40

Soit $AB\Gamma\Delta$ un parallélogramme, et ΔB une de ses diagonales ; les triangles $AB\Delta$ et $B\Delta\Gamma$ sont donc égaux et semblables entre eux ; si ces triangles sont appliqués l'un sur l'autre, leurs centres de gravité coïncideront donc à leur tour. Soit E le centre de gravité du triangle $AB\Delta$; divisons ΔB en deux parties égales au point Θ , menons $E\Theta$ et prenons sur le prolongement de $E\Theta$ le segment $Z\Theta$ égal à ΘE . Si maintenant le triangle $AB\Delta$ est appliqué sur le triangle $B\Delta\Gamma$, le côté AB étant posé sur $\Delta\Gamma$, le côté $A\Delta$ sur $B\Gamma$, le segment ΘE s'appliquera à son tour sur $Z\Theta$, et le point E coïncidera avec le point Z . Mais il coïncidera

1. Cf. prop. 9.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $ΑΒΓΔ$ καὶ ἐν αὐτῷ ἡ $ΕΖ$ δίχα τέμνουσα τὰς $ΑΒ$, $ΓΔ$, ἡ δὲ $ΚΛ$ τὰς $ΑΓ$, $ΒΔ$ ἔστιν δὴ τοῦ $ΑΒΓΔ$ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς $ΕΖ$ · δέδεικται γὰρ τοῦτο· διὰ ταῦτα δὲ
 5 καὶ ἐπὶ τῆς $ΚΛ$ · τὸ $Θ$ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρους. Κατὰ δὲ τὸ $Θ$ αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτουσι· ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ

Ἐστιν δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι.

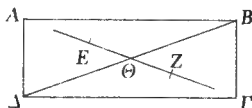


Fig. 40

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ $ΔΒ$. Τὰ ἄρα $ΑΒΔ$, $ΒΔΓ$ τρίγωνα ἴσα ἐντὶ καὶ ὁμοῖα ἀλλάλοις· ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα τῶν τριγώνων καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. Ἐστω δὴ τοῦ $ΑΒΔ$ τριγώνου κέντρον τοῦ
 15 βάρους τὸ $Ε$ σαμεῖον, καὶ τετμάσθω δίχα ἡ $ΔΒ$ κατὰ τὸ $Θ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΕΘ$ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἡ $ΖΘ$ ἴσα τῇ $ΘΕ$. Ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ $ΑΒΔ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ $ΒΔΓ$ τρίγωνον καὶ τιθεμένης τῆς μὲν $ΑΒ$ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν $ΔΓ$, τῆς δὲ $ΑΔ$ ἐπὶ τὰν $ΒΓ$, ἐφαρμόξει καὶ ἡ $ΘΕ$
 20 εὐθεῖα ἐπὶ τὰν $ΖΘ$, καὶ τὸ $Ε$ σαμεῖον ἐπὶ τὸ $Ζ$ πεσεῖται.

4 ταῦτά $DEGH$: hoc \propto || 7 συμπίπτουσι \propto : πίπτουσι $DEGH$ || 12 ἐφαρμοζομένων $G\propto$: ἐφαρμοζόμενον DEH || 15-16 τετμάσθω δίχα ἡ $ΔΒ$ κατὰ τὸ $Θ$, καὶ Basil. : secetur in duo quae db penes t et \propto om. $DEGH$ || 17 $ΑΒΔ$ mss. $G\propto$: $ΑΒΔΓ$ mss. DEH || 18 $ΒΔΓ$ Basil. : dbg ms. \propto $ΑΔΓ$ mss. $DEGH$ || 19 ἐφαρμόξει Heiberg : ἐφαρμόζει codd.

ainsi aussi avec le centre de gravité du triangle $B\Delta\Gamma^1$. Du moment donc que E est le centre de gravité du triangle $AB\Delta$, et Z le centre de gravité du triangle $\Delta B\Gamma$, il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux triangles est le milieu du segment de droite EZ^2 , à savoir le point Θ .

11.

Deux triangles semblables étant donnés, et dans ces triangles des points semblablement situés par rapport aux triangles, si l'un de ces points est centre de gravité du triangle dans lequel il est situé, l'autre point est lui aussi centre de gravité du triangle dans lequel il est situé. Nous appelons semblablement situés par rapport à des figures semblables des points tels que les droites qui les joignent aux sommets des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues³.

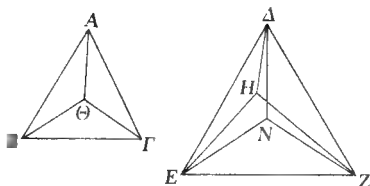


Fig. 41

Soit les deux triangles $AB\Gamma$ et ΔEZ , et que $A\Gamma$ soit à ΔZ comme AB est à ΔE et comme $B\Gamma$ est à EZ^4 ; soit Θ et N deux points semblablement situés par rapport aux triangles indiqués $AB\Gamma$ et ΔEZ , et soit Θ le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$; je dis que le point N est centre de gravité du triangle ΔEZ .

1. Cf. post. 4. A cet endroit, il manque la conclusion : « le point Z est ainsi le centre de gravité du triangle $B\Delta\Gamma$. » Heiberg propose de compléter le texte par : τὸ Z ἄρα κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τοῦ $B\Delta\Gamma$ τριγώνου.

2-4. Cf. notes compl.

Ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ $\mathbf{B\Delta\Gamma}$ τριγώνου.
 Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν $\mathbf{A\mathbf{B}\Delta}$ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ
 \mathbf{E} σαμεῖον, τοῦ δὲ $\mathbf{\Delta\mathbf{B}\Gamma}$ τὸ \mathbf{Z} , δηλὸν ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων
 τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους
 5 ἔστι τὸ μέσον τᾶς \mathbf{EZ} εὐθείας, ὅπερ ἔστι τὸ $\mathbf{\Theta}$ σαμεῖον.

ια'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἀλλάλοις ᾗ καὶ ἐν αὐτοῖς
 σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ποτὶ τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σαμεῖον
 τοῦ ἐν $\mathbf{\psi}$ ἔστι τριγώνου κέντρον ᾗ τοῦ βάρους, καὶ τὸ
 10 λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἔστι τοῦ βάρους τοῦ ἐν $\mathbf{\psi}$ ἔστι
 τριγώνου [ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ
 ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι
 εὐθεῖαι ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις
 πλευραῖς].

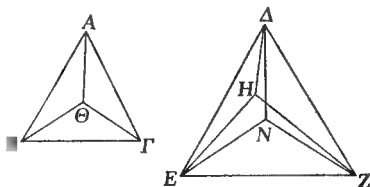


Fig. 41

15 Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $\mathbf{A\mathbf{B}\Gamma}$, $\mathbf{\Delta\mathbf{E}Z}$, καὶ ἔστω ὡς ἂ $\mathbf{A\Gamma}$
 ποτὶ $\mathbf{\Delta Z}$, οὕτως ἂ τε $\mathbf{A\mathbf{B}}$ ποτὶ $\mathbf{\Delta\mathbf{E}}$ καὶ ἂ $\mathbf{B\Gamma}$ ποτὶ \mathbf{EZ} , καὶ
 ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω
 τὰ $\mathbf{\Theta}$, \mathbf{N} [πρὸς τὰ $\mathbf{A\mathbf{B}\Gamma}$, $\mathbf{\Delta\mathbf{E}Z}$ τρίγωνα], καὶ ἔστω τὸ $\mathbf{\Theta}$
 κέντρον τοῦ βάρους τοῦ $\mathbf{A\mathbf{B}\Gamma}$ τριγώνου · λέγω ὅτι καὶ τὸ
 20 \mathbf{N} κέντρον βάρους ἔστι τοῦ $\mathbf{\Delta\mathbf{E}Z}$ τριγώνου.

1 $\mathbf{B\Delta\Gamma}$ ms. \mathbf{G} : dbg ms. \mathbf{x} $\mathbf{A\Delta\Gamma}$ mss. $\mathbf{DEH} \parallel$ 2 τὸ \mathbf{G} : τοῦ \mathbf{DEH} .

Qu'il n'en soit pas ainsi, et que le centre de gravité du triangle ΔEZ soit le point H . Menons les droites ΘA , ΘB , $\Theta \Gamma$, ΔN , EN , ZN , ΔH , EH , ZH . Du moment donc que le triangle $AB\Gamma$ est semblable au triangle ΔEZ , et que les centres de gravité sont les points Θ et H , que, de plus, les centres de gravité de figures semblables sont semblablement situés, de façon que les droites qui les joignent aux sommets font des angles égaux avec les côtés homologues, chacune avec chacun¹, l'angle $H\Delta E$ est égal à l'angle ΘAB ². Mais l'angle ΘAB est égal à l'angle $E\Delta N$ ² en vertu de la situation semblable des points Θ et N ; il s'ensuit que l'angle $E\Delta N$ est lui aussi égal à l'angle $E\Delta H$, c'est-à-dire qu'un angle plus grand est égal à un angle plus petit, ce qui est impossible. Le point N ne saurait donc ne pas être le centre de gravité du triangle ΔEZ ; N est donc centre de gravité.

12.

Deux triangles semblables étant donnés, si le centre de gravité de l'un est situé sur la droite menée d'un des sommets au milieu de la base (sc. du côté opposé), le centre de gravité de l'autre triangle sera également situé sur la droite menée semblablement.

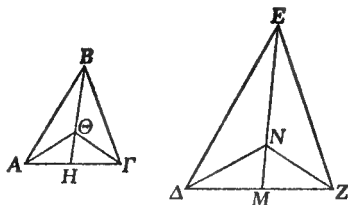


Fig. 42

1. Cette consécutive est considérée comme une interpolation par Heiberg.

2. Cf. post. 5.

- Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ H κέντρον βάρους τοῦ $\Delta\text{E}\text{Z}$ τριγώνου, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΘA , ΘB , $\Theta\Gamma$, ΔN , EN , ZN , ΔH , EH , ZH . Ἐπεὶ οὖν ὁμοῖόν ἐστι τὸ $\text{AB}\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta\text{E}\text{Z}$ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ
- 5 τὰ Θ , H σαρμεῖα, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα [ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας ποτὶ ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς ἕκαστον ἐκάσταις], ἴσα ἄρα ἡ ὑπὸ $\text{H}\Delta\text{E}$ γωνία τῇ ὑπὸ ΘAB . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΘAB γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{N}$ [διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ Θ ,
- 10 N σαρμεῖα]· καὶ ἡ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{N}$ γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{H}$, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ $\Delta\text{E}\text{Z}$ τριγώνου τὸ N σαρμεῖον· ἔστιν ἄρα.

ιβ'.

- 15 Εἴ κα δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἔωντι, τοῦ δὲ ἐνὸς τριγώνου κέντρον ἢ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ἐντὶ ἀπὸ τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν τὰν βάσεων ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ὁμοίως ἀγομένης γραμμῆς.

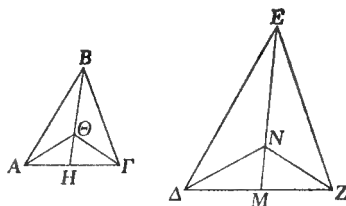


Fig. 42

8 ἄρα DEGH : est ergo X || 9 $\text{E}\Delta\text{N}$ ms. X : $\text{E}\Delta\text{H}$ mss. DEGH
 || 10 $\text{E}\Delta\text{N}$ Heiberg: $\text{E}\Delta\text{H}$ codd. || 11 $\text{E}\Delta\text{H}$ Heiberg: $\text{E}\Delta\text{N}$ codd.
 || 12 N mss. DEGH : h ms. X || 16 τινος DEGH : om. X .

Soit les deux triangles $AB\Gamma$ et ΔEZ ; que $A\Gamma$ soit à ΔZ comme AB est à ΔE et comme $B\Gamma$ est à ZE ¹ ; divisons le côté $A\Gamma$ en deux parties égales au point H et menons la droite BH ; que le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$, soit Θ , soit situé sur BH ; je dis que, aussi pour le triangle $E\Delta Z$, le centre de gravité est situé sur la droite menée semblablement.

Divisons ΔZ en deux parties égales au point M , menons EM et (sc. prenons sur EM un point N de manière) que BH soit à $B\Theta$ comme ME est à EN ; menons les droites $A\Theta$, $\Theta\Gamma$, ΔN , NZ . Puisque AH est la moitié de ΓA et ΔM la moitié de ΔZ , on a aussi l'égalité entre le rapport de BA à $E\Delta$ et le rapport de AH à ΔM . Les côtés comprenant des angles égaux² sont, de plus, proportionnels ; il s'ensuit que l'angle AHB est égal³ à l'angle ΔME et que AH est à ΔM comme⁴ BH est à EM . Mais on a aussi BH à $B\Theta$ comme ME à EN ; par identité, le rapport de AB à ΔE est donc égal⁵ au rapport de $B\Theta$ à EN . Les côtés comprenant des angles égaux sont, de plus, proportionnels ; dans ces conditions, l'angle $BA\Theta$ est égal à l'angle $E\Delta N$; par conséquent l'angle $\Theta A\Gamma$ qui reste⁶ est égal à l'angle $N\Delta Z$. Mais pour les mêmes raisons l'angle $B\Gamma\Theta$ est égal à l'angle EZN , et l'angle $\Theta\Gamma H$ égal à l'angle NZM . Comme on avait montré qu'aussi l'angle $AB\Theta$ est égal à l'angle ΔEM , l'angle $\Theta B\Gamma$ qui reste est égal⁷ à son tour à l'angle NEZ . Pour toutes ces raisons, les points Θ et N sont semblablement situés, comme faisant des angles égaux avec les côtés homologues. Du moment donc que les points Θ et N sont semblablement situés et que Θ est le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$, le point N , lui aussi, est centre de gravité du triangle ΔEZ .

1. Cf. Eucl. VI, 4.

2. Sc. les angles BAH et $E\Delta M$, égaux en vertu de la similitude des triangles $AB\Gamma$ et ΔEZ .

3. Cf. Eucl. VI, 6.

4. Cf. Eucl. VI, 4.

5-7. Cf. notes compl.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ , καὶ ἔστω ὡς ἂ $A\Gamma$ ποτὶ ΔZ , οὕτως ἂ τε AB ποτὶ ΔE καὶ ἂ $B\Gamma$ ποτὶ ZE , καὶ τμαθείσας τὰς $A\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ H ἐπεξεύχθω ἂ BH , καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὰς
 5 BH τὸ Θ · λέγω ὅτι καὶ τοῦ $E\Delta Z$ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τὰς ὁμοίως ἀγομέναις εὐθείαις.

Τετμάσθω ἂ ΔZ δίχα κατὰ τὸ M , καὶ ἐπεξεύχθω ἂ EM , καὶ πεποιήσθω ὡς ἂ BH ποτὶ $B\Theta$, οὕτως ἂ ME ποτὶ EN , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Theta$, $\Theta\Gamma$, ΔN , NZ . Ἐπεὶ ἐστὶ τὰς μὲν
 10 ΓA ἡμίσεια ἂ AH , τὰς δὲ ΔZ ἡμίσεια ἂ ΔM , ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἂ BA ποτὶ $E\Delta$, οὕτως ἂ AH ποτὶ ΔM . Καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι · ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἂ ὑπὸ AHB γωνία τῇ ὑπὸ ΔME , καὶ ἐστὶν ὡς ἂ AH ποτὶ ΔM , οὕτως ἂ BH ποτὶ EM . Ἐστὶν δὲ καὶ ὡς ἂ BH ποτὶ $B\Theta$,
 15 οὕτως ἂ ME ποτὶ EN · καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἂ AB ποτὶ ΔE , οὕτως ἂ $B\Theta$ ποτὶ EN . Καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι · εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἂ ὑπὸ $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta N$ · ὥστε καὶ λοιπὰ ἂ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ $N\Delta Z$ γωνίᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἂ
 20 μὲν ὑπὸ $B\Gamma\Theta$ γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ EZN , ἂ δὲ ὑπὸ $\Theta\Gamma H$ τῇ ὑπὸ NZM ἴσα. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἂ ὑπὸ $AB\Theta$ τῇ ὑπὸ ΔEM ἴσα · ὥστε καὶ λοιπὰ ἂ ὑπὸ $\Theta B\Gamma$ γωνία ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ NEZ . Διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως κείται τὰ Θ , N σαμεῖα [ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας
 25 ποιεῖ]. Ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κείται τὰ Θ , N σαμεῖα, καὶ ἐστὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, καὶ τὸ N ἄρα κέντρον βάρους τοῦ ΔEZ .

5 τὸ alt. addidi || 9 A^Θ Basil. : B^Θ codd. || ΔN ms. ζ : ΔH mss. DEGH || NZ ms. ζ : HZ mss. DEGH || 11 AH mss. DGζ : AN mss. EH || 18 ἂ add. Heiberg || 23 ταῦτα Torellius : τὰ αὐτὰ DEGH hoc ζ || 24 ἴσας DEHζ : καὶ ἴσας G.

13.

Dans tout triangle, le centre de gravité est situé sur la droite menée d'un sommet au milieu du côté opposé.

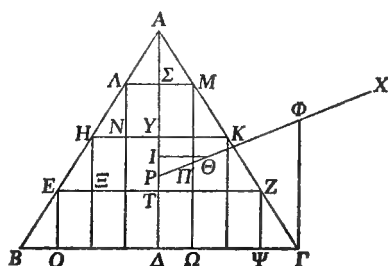


Fig. 43

Soit le triangle $AB\Gamma$ et dans ce triangle la droite $A\Delta$ menée (sc. du sommet A) au milieu du côté $B\Gamma$; il faut démontrer que le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est situé sur la droite $A\Delta$.

Qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit le point Θ , si possible; menons par Θ la parallèle ΘI à $B\Gamma$. Si, dès lors, le segment $\Delta\Gamma$ est continuellement divisé en deux parties égales, il arrivera un moment où le segment de reste sera inférieur à ΘI ; divisons chacun des segments $B\Delta$ et $\Delta\Gamma$ en parties égales (sc. à ce reste), menons par les points de division des parallèles à $A\Delta$ et menons les droites EZ , HK et AM , qui seront alors parallèles à $B\Gamma$. Dès lors, le centre de gravité est, dans le parallélogramme MN sur la droite $Y\Sigma$, dans le parallélogramme KE sur $T\Upsilon$, dans le parallélogramme ZO sur $T\Delta^1$; il s'ensuit que dans la grandeur composée de tous ces parallélogrammes le centre de gravité est sur la droite² $\Sigma\Delta$.

1. Cf. prop. 9.

2. Cf. prop. 4.

Que ce centre soit le point P ; joignons P à Θ , prolongeons $P\Theta$ et menons $\Gamma\Phi$ parallèlement à $A\Delta$. Le rapport du triangle $A\Delta\Gamma$ à la somme des triangles construits sur AM , MK , KZ , $Z\Gamma$, semblables au triangle $A\Delta\Gamma$, est donc égal¹ au rapport de ΓA à AM , en vertu de l'égalité des segments AM , MK , $Z\Gamma$, KZ . Mais puisque, d'autre part, le rapport du triangle $A\Delta B$ à la somme des triangles semblables construits sur $A\Lambda$, ΛH , HE , EB est égal au rapport de BA à $A\Lambda$, le triangle $AB\Gamma$ est à la somme des triangles indiqués comme ΓA est à AM . Mais le rapport de ΓA à AM est supérieur au rapport de ΦP à $P\Theta$; car le rapport de ΓA à AM est égal au rapport de ΦP à $P\Pi$ en vertu de la similitude des triangles ; ainsi le rapport du triangle $AB\Gamma$ à la somme des triangles indiqués est supérieur au rapport de ΦP à $P\Theta$; il s'ensuit, par dissociation, qu'aussi le rapport de la somme des parallélogrammes MN , $K\Xi$, ZO aux triangles qui restent est supérieur² au rapport de $\Phi\Theta$ à ΘP . Soit donc un rapport $X\Theta$ à ΘP égal au rapport de la somme des parallélogrammes à la somme des triangles³. Puisqu'on a alors une certaine grandeur, le triangle $AB\Gamma$, dont le centre de gravité est le point Θ , qu'on en a retranché la grandeur composée des parallélogrammes MN , $K\Xi$, ZO , et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P , le centre de gravité de la grandeur restante, composée des triangles qui restent, est situé sur le prolongement de la droite $P\Theta$, sur lequel on a découpé un segment ayant à ΘP le rapport qu'a la grandeur retranchée à la grandeur qui reste⁴. Le point X est donc centre de gravité de la grandeur composée des triangles qui restent, ce qui

1. Cf. Eucl. V, 16 et 18 ; VI, 2.

2. Cf. *De la sph. et du cyl.* II, 7 et Pappus VII, 45.

3. $X\Theta$ est en effet supérieur à $P\Theta$; cf. Eucl. V, 8.

4. Cf. prop. 8.

- τῆς ΣΔ εὐθείας. Ἐστω δὴ τὸ Ρ, καὶ ἐπέξεύχθω ἅ ΡΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΔ ἅ ΓΦ. Τὸ δὴ ΑΔΓ [τρίγωνον] ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τὰν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τῷ ΑΔΓ τοῦτον ἔχει τὸν
- 5 λόγον, ὃν ἔχει ἅ ΓΑ ποτὶ ΑΜ, διὰ τὸ ἴσας εἶμεν τὰς ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τὰν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἅ ΒΑ ποτὶ ΑΛ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον
- 10 ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἅ ΓΑ ποτὶ ΑΜ. Ἀλλὰ ἅ ΓΑ ποτὶ ΑΜ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἅ ΦΡ ποτὶ ΡΘ · ὁ γὰρ τῆς ΓΑ ποτὶ ΑΜ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ [ὅλας] τῆς ΦΡ ποτὶ ΡΠ [διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα] · καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ποτὶ τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἅ
- 15 ΦΡ ποτὶ ΡΘ · ὥστε καὶ διελόντι τὰ ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλογράμμου ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἅ ΦΘ ποτὶ ΘΡ. Γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων ποτὶ τὰ τρίγωνα λόγῳ ἅ ΧΘ ποτὶ ΘΡ. Ἐπεὶ οὖν ἔστι τι μέγεθος τὸ ΑΒΓ, οὐ τὸ κέντρον τοῦ
- 20 βάρους ἐστὶ τὸ Θ, καὶ ἀφήρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶν τοῦ ἀφηρημένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρους
- 25 ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΡΘ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας ποτὶ τὰν ΘΡ τοῦτον ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. Τὸ ἄρα Χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ

1 ἔστω Torellius : ἔσται codd. || 6 ΜΚ mss. GZ : ΜΖ mss. DEH || καὶ DEGH : om. Z || 12 ὅλας codd. : om. Eutocius del. Heiberg || 13 διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα codd. : om. Eutocius del. Heiberg || 17 ἔχει GHZ : om. DE || 21 ΚΞ, ΖΟ mss. GZ : ΚΖΕΟ mss. DEH || 25 ΡΘ Basil. : ΕΘ mss. DEH, ΠΘ ms. G, om. Z || 26 ποτὶ Torellius : ἐπὶ codd.

est impossible, puisque tous (sc. ces triangles) sont situés d'un même côté¹ de la droite menée par le point X parallèlement à $A\Delta$. La proposition est donc évidente.

AUTRE DÉMONSTRATION DE LA MÊME PROPOSITION

Soit le triangle $AB\Gamma$; menons la droite $A\Delta$ joignant A au milieu du côté $B\Gamma$. Je dis que le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est situé sur $A\Delta$.

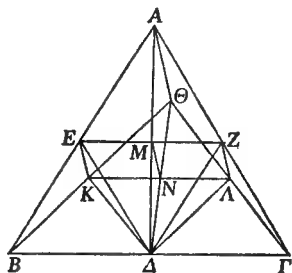


Fig. 44

En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit, si possible, le point Θ . Menons les droites $A\Theta$, ΘB et $\Theta \Gamma$ et joignons les milieux des côtés BA , $A\Gamma$ (sc. et $B\Gamma$) par les droites $E\Delta$ et $Z\Delta$. Menons EK et $Z\Lambda$ parallèlement à $A\Theta$, et menons les droites $K\Lambda$, $\Lambda\Delta$, ΔK , $\Delta\Theta$ et MN . Puisque le triangle $AB\Gamma$ est semblable au triangle $\Delta Z\Gamma$, parce que BA est parallèle² à $Z\Delta$, puisque, de plus, le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est le point Θ (sc. par hypothèse), le centre de gravité du triangle $Z\Delta\Gamma$ est le point³ Λ ; car les points Θ et Λ sont semblablement situés dans chacun des triangles⁴. Pour les mêmes raisons, aussi dans le triangle $EB\Delta$, le centre de gravité

1-4. Cf. notes compl.

τῶν περιλειπομένων · ὅπερ ἀδύνατον · τὰς γὰρ διὰ τοῦ Χ εὐθείας παρὰ τὰν ΑΔ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταυτὰ πάντα ἐντὶ [τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος]. Δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

5

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἡ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ · λέγω ὅτι ἐπὶ τὰς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

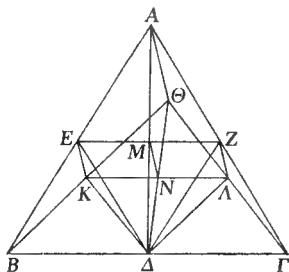


Fig. 44

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν
 10 αἱ τε ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ ἐπὶ μέσας τὰς ΒΑ, ΑΓ,
 καὶ παρὰ τὰν ΑΘ ἄχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν
 αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. Ἐπεὶ ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ
 τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ διὰ τὸ παράλληλον εἶμεν τὰν
 ΒΑ τῇ ΖΔ, καὶ ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους
 15 τὸ Θ σαμεῖον, καὶ τοῦ ΖΔΓ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ
 βάρους ἐστὶ τὸ Λ σαμεῖον · ὁμοίως γάρ ἐντι κείμενα τὰ
 Θ, Λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων [ἐπειδὴ περ ποτὶ
 τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιεῖοντι γωνίας · φανερόν
 γὰρ τοῦτο]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΕΒΔ κέντρον τοῦ

13 τὰν G : τὸν DEH || 16 ἐντι κείμενα ζ : ἀντικείμενα DEGH ||
 18 ποιεῖοντι Heiberg : ποιῶντι codd. || 18-19 φανερόν γὰρ τοῦτο
 DEGH : om. ζ.

est le point K , de façon que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des deux triangles $EB\Delta$ et $Z\Delta\Gamma$ est situé au milieu¹ du segment de droite $K\Lambda$. Mais le milieu du segment $K\Lambda$ est le point N , puisque² BK est à ΘK comme BE est à EA , que $\Gamma\Lambda$ est à $\Lambda\Theta$ comme ΓZ est à ZA , et que, dans ces conditions, $B\Gamma$ est parallèle³ à $K\Lambda$. On a mené, de plus, la droite $\Delta\Theta$; le segment KN est donc au segment $N\Lambda$ comme $B\Delta$ est à $\Delta\Gamma$. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des deux triangles indiqués est le point N . D'autre part, dans le parallélogramme $AE\Delta Z$, le centre de gravité⁴ est le point M , de façon que le centre de gravité de la grandeur somme de toutes les grandeurs est situé sur la droite MN . Mais le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est aussi (sc. par hypothèse) le point Θ . Par conséquent la droite MN prolongée passera par le point Θ , ce qui est impossible⁵. Le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ ne peut donc pas ne pas être situé sur la droite $\Lambda\Delta$. Il est donc situé sur cette droite.

14.

Dans tout triangle le centre de gravité est le point de concours⁶ des droites joignant les sommets du triangle aux milieux des côtés.

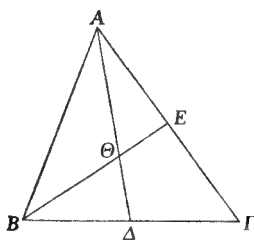


Fig. 45

1. Cf. prop. 4.

2. Cf. Eucl. VI, 2.

3-6. Cf. notes compl.

- βάρεός ἐστι τὸ Κ σαμεῖον · ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΕΒΔ, ΖΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τὰς ΚΛ εὐθείας [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ ΕΒΔ, ΖΔΓ τρίγωνα]. Καὶ ἐστιν τὰς ΚΛ μέσον
- 5 τὸ Ν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΚ ποτὶ ΘΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ ποτὶ ΖΑ, οὕτως ἡ ΓΛ ποτὶ ΛΘ · εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν ἡ ΒΓ τῇ ΚΛ παράλληλος. Καὶ ἐπέζευκται ἡ ΔΘ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ ποτὶ ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΝ ποτὶ τὰν ΝΛ · ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκει-
- 10 μένου μεγέθους κέντρον ἐστὶ τὸ Ν. Ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΕΔΖ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον · ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τὰς ΜΝ εὐθείας. Ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον · ἡ ΜΝ
- 15 ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται διὰ τοῦ Θ σαμείου · ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου οὐκ ἔστιν ἐπὶ τὰς ΑΔ εὐθείας · ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

ιδ'

- 20 Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπύπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

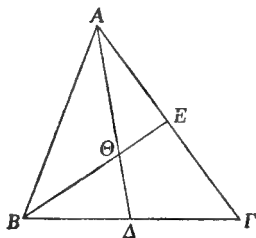


Fig. 45

Soit le triangle $AB\Gamma$; menons la droite $A\Delta$ joignant A au milieu Δ de $B\Gamma$, et la droite BE joignant B au milieu E de $A\Gamma$. Le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ sera ainsi situé sur chacune des deux droites $A\Delta$ et BE , car cela a été démontré¹. Le point Θ est donc le centre de gravité.

15.

Dans tout trapèze ayant deux côtés parallèles entre eux, le centre de gravité est situé sur le segment de droite joignant les milieux des côtés parallèles en un point qui divise ce segment de manière que le segment partiel ayant pour extrémité le milieu du plus petit des côtés parallèles soit au segment qui reste comme la somme du double du plus grand côté et du plus petit côté parallèles est à la somme du double du plus petit côté et du plus grand côté parallèles².

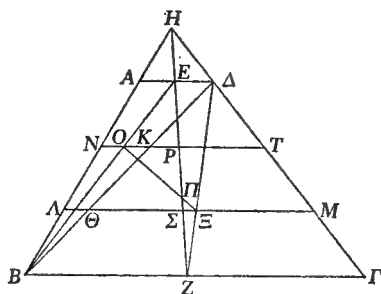


Fig. 46

Soit le trapèze $AB\Gamma\Delta$ ayant les côtés $A\Delta$ et $B\Gamma$ parallèles, et le segment de droite EZ joignant les milieux des côtés $A\Delta$ et $B\Gamma$. Il est d'abord évident que le centre de gravité du trapèze est situé sur EZ .

1. Cf. prop. 13.

2. Proposition citée *Quadr. parab.* 10.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ ἄχθω ἡ μὲν AD ἐπὶ μέσαν τὰν $B\Gamma$, ἡ δὲ BE ἐπὶ μέσαν τὰν AG · ἐσσεῖται δὴ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐφ' ἑκατέρας τὰν AD , BE · δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ὡστε τὸ Θ σαμεῖον κέντρον
5 τοῦ βάρους ἐστίν.

ιε'.

Παντὸς τραπέζιου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλάλαις τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τὰν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτὰς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τὰς ἐλάσσονος τὰν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρος ἡ ἴσα τῇ διπλασίᾳ τὰς μείζονος μετὰ τὰς ἐλάσσονος ποτὶ τὰν διπλασίαν τὰς ἐλάσσονος μετὰ τὰς
15 μείζονος τὰν παραλλήλων.

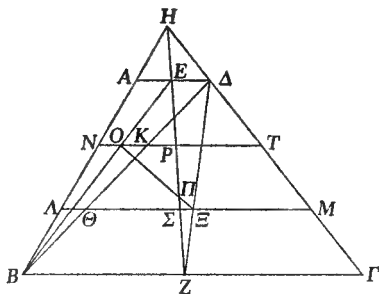


Fig. 46

Ἐστω τραπέζιον τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλλήλους ἔχον τὰς AD , $B\Gamma$, ἡ δὲ EZ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τὰν AD , $B\Gamma$. Ὅτι οὖν ἐπὶ τὰς EZ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπέζιου

2 ἐσσεῖται Heiberg : εἰ $DEH \propto$ ἐστι $G \parallel$ 10-11 ἔχον τὰν G : ἔχόντων $DEH \parallel$ 13 τῇ διπλασίᾳ $G \propto$: τὰς διπλασίας DEH .

En prolongeant en effet les segments $\Gamma\Delta H$, ZEH et BAH , il est manifeste qu'ils convergent en un même point, que le centre de gravité du triangle HBF sera situé sur le segment de droite HZ , et que le centre de gravité du triangle $AH\Delta$ sera semblablement situé¹ sur le segment EH . Il s'ensuit que le centre de gravité du trapèze restant $AB\Gamma\Delta$ sera situé² sur EZ . Joignons les points B et Δ et divisons $B\Delta$ en trois parties égales par les points K et Θ ; menons par les points K et Θ les parallèles $\Lambda\Theta M$ et NKT à $B\Gamma$, et menons les droites ΔZ , BE et $O\Xi$; le centre de gravité du triangle $\Delta B\Gamma$ sera ainsi situé sur ΘM , puisque ΘB est la troisième partie³ de $B\Delta$ et que $M\Theta$ a été mené par Θ parallèlement à la base. Mais le centre de gravité du triangle $\Delta B\Gamma$ est lui aussi situé sur ΔZ , de façon que le point Ξ est le centre de gravité du triangle indiqué. Or pour les mêmes raisons le point O est le centre de gravité du triangle $AB\Delta$. Il s'ensuit que pour la grandeur qui est la somme des triangles $AB\Delta$ et $B\Delta\Gamma$, à savoir pour le trapèze, le centre de gravité est situé sur $O\Xi$. Mais le centre de gravité du trapèze indiqué est aussi situé sur EZ , de façon que dans le trapèze $AB\Gamma\Delta$ le centre de gravité est le point Π . D'autre part, le rapport du triangle $B\Delta\Gamma$ au triangle $AB\Delta$ sera égal⁴ au rapport de $O\Pi$ à $\Pi\Xi$. Mais le rapport du triangle $B\Delta\Gamma$ au triangle $AB\Delta$ est égal⁵ au rapport de $B\Gamma$ à $A\Delta$, et le rapport de $O\Pi$ à $\Pi\Xi$ est égal⁶ au rapport de $P\Pi$ à $\Pi\Sigma$, de façon que $B\Gamma$ est à $A\Delta$ comme $P\Pi$ est à $\Pi\Sigma$; par conséquent le rapport de la somme du double de $B\Gamma$ et de $A\Delta$ à la somme du double de $A\Delta$ et de $B\Gamma$ est égal au rapport de la somme du double de $P\Pi$ et de $\Pi\Sigma$ à la somme du double de $\Pi\Sigma$ et de $P\Pi$. Mais le double de $P\Pi$ augmenté de $\Pi\Sigma$ est égal à la somme de ΣP et de $P\Pi$, qui est elle-même égale⁷ à ΠE , et le double de $\Pi\Sigma$ augmenté de $P\Pi$ est égal à la somme de $P\Sigma$ et de $\Sigma\Pi$, qui est elle-même égale à ΠZ ⁸. La proposition est donc démontrée.

- φανερὸν. Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται, καὶ ἐσσεῖται τοῦ ΗΒΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΗΖ, καὶ ὁμοίως τοῦ ΑΗΔ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΕΗ ·
- 5 καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ. Ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΒΔ διηρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθωσαν αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ · ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ΔΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ
- 10 βάρους ἐπὶ τᾶς ΘΜ, ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἡ ΘΒ τᾶς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ Θ σαμείου παράλληλος τῇ βάσει ἄκται ἡ ΜΘ]. Ἔστιν δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ΔΒΓ τριγώνου καὶ ἐπὶ τᾶς ΔΖ · ὥστε τὸ Ξ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰρημένου τριγώνου. Διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ Ο σαμεῖον
- 15 κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ΑΒΔ τριγώνου · τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ τριγώνων συγκεκλιμένου μεγέθους, ὅπερ ἐστὶ τὸ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΟΞ εὐθείας. Ἔστιν δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἐπὶ τᾶς ΕΖ · ὥστε τοῦ ΑΒΓΔ
- 20 τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ Π σαμεῖον. Ἐχοι δ' ἂν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ λόγον, ὃν ἡ ΟΠ ποτὶ ΠΞ. Ἄλλ' ὥς τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ ἡ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, ὥς δὲ ἡ ΟΠ ποτὶ ΠΞ, οὕτως ἡ ΡΠ ποτὶ ΠΣ · καὶ ὥς ἄρα ἡ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἡ ΡΠ ποτὶ
- 25 ΠΣ · ὥστε καὶ ὥς δύο αἱ ΒΓ μετὰ τᾶς ΑΔ ποτὶ δύο τὰς ΑΔ μετὰ τᾶς ΒΓ, οὕτως δύο αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ ποτὶ δύο τὰς ΠΣ μετὰ τᾶς ΡΡ. Ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ συναμφοτέρως ἐστὶν ἡ ΣΡΠ, τουτέστιν ἡ ΠΕ, δύο δὲ αἱ ΠΣ μετὰ τᾶς ΡΡ συναμφοτέρως ἐστὶν ἡ ΡΣΠ, τουτέστιν
- 30 ἡ ΠΖ · δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.

1 ἐκβάλῃς ΕΓΖ : ἐκβάλῃ ΔΗ || 2 καὶ Ζ : om. DEGH || τοῦ Heiberg : τὸ τοῦ codd. || 4 τὸ add. Heiberg || 18 ἐπὶ ΔΕΗ : ἐστὶν ἐπὶ ΓΖ || 29 ΡΣΠ Heiberg : ΡΠΣ codd.

DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES II

1.

Si deux aires comprises entre une droite et une parabole, qu'il nous est possible d'appliquer¹ à un segment de droite donné, n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux aires sera situé sur le segment de droite joignant leurs centres de gravité et divisera le segment indiqué de manière que ses segments partiels sont dans le rapport inverse des aires.

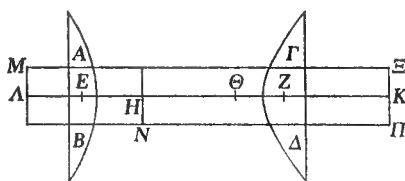


Fig. 47

Soit AB et $\Gamma\Delta$ deux aires telles que nous venons de les définir; soit E et Z leurs centres de gravité; que le rapport de $Z\Theta$ à ΘE soit égal au rapport de AB à $\Gamma\Delta$. Il faut montrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux aires AB et $\Gamma\Delta$ est le point Θ .

Soit donc deux segments ZH et ZK égaux chacun

1. La possibilité de cette application est démontrée dans le traité *La quadr. de la parabole*.

Ἴσορροπικῶν β'

α'.

- Εἴ κα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ
 ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν
 5 εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους
 ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθους
 τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐσσεῖται ἐπὶ τᾷς εὐθείας τᾷς
 ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν διαιρέον
 οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς
 10 ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις.

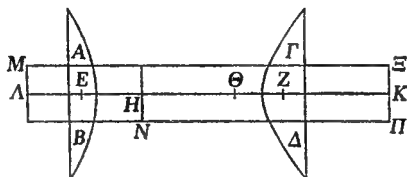


Fig. 47

- Ἐστω δύο χωρία τὰ AB, ΓΔ, οἷα εἴρηται, κέντρα δὲ
 αὐτῶν τοῦ βάρους ἔστω τὰ E, Z σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον
 τὸ AB ποτὶ τὸ ΓΔ, τοῦτον ἔχέτω ἃ ΖΘ ποτὶ ΘΕ. Δεικτέον
 ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν AB, ΓΔ χωρίων συγκειμένου
 15 μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ Θ σαμεῖον.

Ἐστω δὴ τῇ μὲν ΕΘ ἑκατέρα ἴσα τὰν ΖΗ, ΖΚ, τῇ δὲ

4 & DEGH Eutocius : om. 5 || 6 ἔχοντι Heiberg : ἔχοντα
 codd. || 8 διαιρέον Torellius : διαιρέων DEGH diuisis 9 || 10
 ἀντιπεπονθότως 11 : ἀντιπεπονθότων DEGH || 12 E, Z mss.
 DEGH : ht ms. 13 || 13 AB ποτὶ τὸ ΓΔ mss. DEGH : abg
 ad dez ms. 14 || ΖΘ mss. DEGH : tk ms. 15 || ΘΕ mss. DEGH :
 kh ms. 16 || 15 Θ mss. DEGH : k ms. 17 || 16 δὲ 18 : δὲ DEGH
 || ΕΘ mss. DEGH : hk ms. 19 || ΖΗ, ΖΚ mss. DEGH : tltm
 ms. 20.

à $E\Theta$, et un segment EA égal à $Z\Theta$, c'est-à-dire à HE ; $\Lambda\Theta$ sera donc aussi égal¹ à $K\Theta$; de plus, le rapport de ΛH à HK sera égal au rapport de AB à $\Gamma\Delta$, chacun de ces segments étant double de chacun². Appliquons dès lors le long de ΛH , de part et d'autre de ce segment, l'aire AB , de façon que le rectangle MN soit équivalent à l'aire AB ; le centre de gravité du rectangle MN sera ainsi³ le point E . Traçons le rectangle $N\Xi$; le rapport du rectangle MN au rectangle $N\Xi$ sera alors égal⁴ au rapport du segment de droite ΛH au segment HK . Mais le rapport de l'aire AB à l'aire $\Gamma\Delta$ est lui aussi égal au rapport de ΛH à HK ; il s'ensuit que l'aire AB est à l'aire $\Gamma\Delta$ comme le rectangle MN est au rectangle $N\Xi$, et par permutation⁵; or l'aire AB est équivalente au rectangle MN ; il s'ensuit que l'aire $\Gamma\Delta$ est, de son côté, équivalente au rectangle $N\Xi$, dont le centre de gravité est le point Z . Et comme le segment $\Lambda\Theta$ est égal à ΘK et que tout le segment ΛK divise en deux parties égales les côtés opposés, le centre de gravité du rectangle entier³ ΠM est le point Θ . Mais le rectangle $M\Pi$ est égal à la somme des rectangles MN et $N\Xi$; il s'ensuit que la grandeur composée des aires AB et $\Gamma\Delta$ admet elle aussi comme centre de gravité le point Θ .

2.

Si dans un segment limité par une droite et une parabole on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, si on inscrit une seconde fois, dans les segments qui restent, des triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, et si on continue de la même manière à inscrire des triangles dans les segments restants, la figure ainsi obtenue sera dite inscrite, dans le segment de parabole, d'une

1-2. Cf. notes compl.

3. Cf. prop. I, 10.

4. Cf. Eucl. VI, 1.

5. Cf. Eucl. V, 16.

- ΖΘ, τουτέστι τῷ ΗΕ, ἴσα ἃ ΕΛ · ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἃ ΛΘ
 τῷ ΚΘ ἴσα, καὶ ἔτι ὡς ἃ ΛΗ ποτὶ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ ποτὶ
 ΓΔ · διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. Παραβεβλήσθω
 δὴ παρὰ τὰν ΛΗ τὸ χωρίον τοῦ ΑΒ ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΛΗ,
 5 ὥστε εἶμεν τὸ ΜΝ ἴσον τῷ ΑΒ · ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΜΝ
 κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ε σαμεῖον. Συμπεπληρώσθω δὴ
 τὸ ΝΞ, ἔξει δὲ τὸ ΜΝ ποτὶ τὸ ΝΞ λόγον, ὃν ἃ ΛΗ ποτὶ
 ΗΚ. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ ΓΔ τὸν τῆς ΛΗ ποτὶ ΗΚ
 λόγον · καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ ποτὶ ΓΔ, οὕτως τὸ ΜΝ ποτὶ
 10 ΝΞ. Καὶ ἐναλλάξ · ἴσον δὲ τὸ ΑΒ τῷ ΜΝ · ἴσον ἄρα καὶ
 τὸ ΓΔ τῷ ΝΞ, καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ζ
 σαμεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἃ ΛΘ τῷ ΘΚ, καὶ ὅλα ἃ ΑΚ
 τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, [τοῦ] ὅλου τοῦ ΠΜ
 κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ Θ σαμεῖον. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ
 15 ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΜΝ, ΝΞ · ὥστε καὶ τοῦ ἐξ
 ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ
 Θ σαμεῖον.

β'.

- Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου
 20 κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον
 τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ παραλειπόμενα
 τμήματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα
 τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος ἴσον, καὶ αἰεὶ εἰς τὰ παραλει-
 πόμενα τμήματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον,
 25 τὸ γεγόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι

1 ΖΘ mss. DEGH : lh ms. ζ || τουτέστι τῷ ΗΕ om. ζ ||
 ΗΕ ms. D : ΗΘ mss. EGH || ΕΛ mss. DEGH : hn ms. ζ ||
 ΛΘ mss. DEGH : kh ms. ζ || 2 ΚΘ mss. DEGH : lm ms. ζ ||
 4 ΛΗ mss. DEGH : ln ms. ζ || χωρίον Torellius : σαμεῖον codd. ||
 τοῦ codd. : τὸ Torellius || 10 ΑΒ mss. DEGH : abg ms. ζ || ΜΝ
 mss. DEGH : xo ms. ζ || 11 ΓΔ mss. DEGH : edz ms. ζ || ΝΞ
 mss. DEGH : op ms. ζ || 13 τοῦ codd. : del. Heiberg || 16 ΑΒ, ΓΔ
 mss. DEGH : abg dez ms. ζ || 17 Θ mss. DEGH : k ms. ζ ||
 23 αἰεὶ DEGH : om. ζ || 25 γνωρίμως G : γνωρίσμως DEH.

manière exacte. La figure inscrite de cette manière a les propriétés évidentes que voici : les droites qui joignent les sommets les plus voisins du sommet du segment de parabole, ainsi que celles qui joignent les sommets suivants, seront parallèles à la base du segment ; les segments de ces droites (sc. situés à l'intérieur de la parabole) seront divisés en deux parties égales par le diamètre du segment de parabole ; ces droites divisent le diamètre du segment dans le rapport des nombres impairs successifs, le nombre un étant attaché au sommet du segment. Ces propriétés seront à démontrer le moment venu¹.

Or si dans un segment limité par une droite et une parabole on inscrit une figure rectiligne d'une manière exacte, le centre de gravité de la figure inscrite sera situé sur le diamètre du segment.

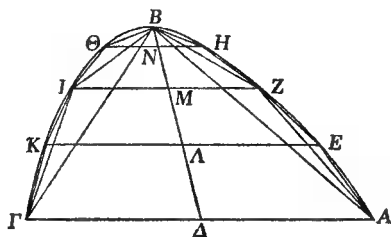


Fig. 48

Soit le segment $AB\Gamma$, tel qu'il a été indiqué ; inscrivons dans ce segment d'une manière exacte la figure rectiligne $AEZH\Theta IK\Gamma$. Il faut démontrer que le centre de gravité de la figure rectiligne est situé sur la droite BA .

Puisque, en effet, le centre de gravité du trapèze $AEK\Gamma$ est situé² sur le segment de droite $\Lambda\Delta$, celui du trapèze $EZIK$ sur le segment de droite MA , celui

1. Les démonstrations promises ici par Archimède ne se trouvent dans aucun de ses écrits conservés.

2. Cf. prop. I, 15.

du trapèze $ZH\Theta I$ sur le segment de droite¹ MN , et que, de plus, le centre de gravité du triangle $HB\Theta$ est situé sur BN , il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière est situé sur le segment de droite $B\Delta$.

3.

Si on inscrit exactement, dans chacun de deux segments semblables² compris entre une droite et une parabole, une figure rectiligne, et si les figures rectilignes inscrites ont le même nombre de côtés, les centres de gravité des figures rectilignes divisent d'une manière semblable (sc. dans la même proportion) les diamètres des segments.

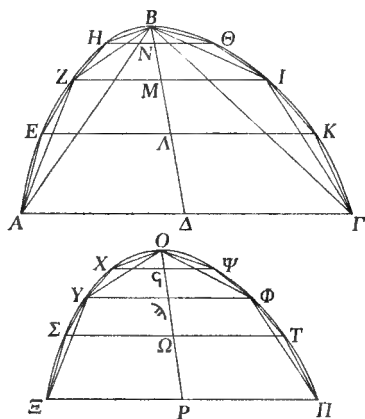


Fig. 49

Soit les deux segments $AB\Gamma$ et $EO\Pi$; inscrivons-y exactement des figures rectilignes, dont le nombre

1. Cf. prop. I, 13.

2. Cf. Apollonius, VI, déf. 7.

ἐπὶ τὰς ΜΛ, τοῦ δὲ ΖΗΘΙ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τὰς ΜΝ, ἔτι δὲ καὶ τοῦ ΗΒΘ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς ΒΝ, δηλὸν ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς ΒΔ ἐστίν.

5

γ'

Εἴ κα δύο τραμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων
10 τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τραμάτων.

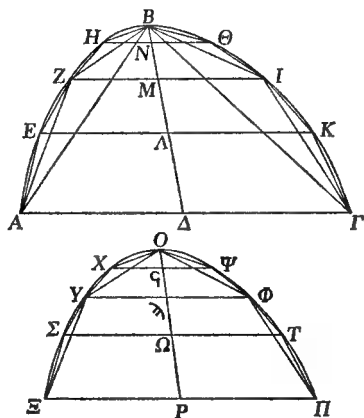


Fig. 49

Ἐστω δύο τράματα τὰ ΑΒΓ, ΞΟΠ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως, καὶ τῶν πασᾶν πλευρᾶν

3 καὶ DEGH : om. 8 || 10 τέμνοντι EG : τέμνοντι DH ||
12 ΕΟΠ mss. DEGH : dez ms. 8 || 13 καὶ τῶν Heiberg : κατὰ DEGH.

total des côtés soit le même dans chaque figure, et soit BA et OP les diamètres des segments ; menons les droites EK , ZI , $H\Theta$ dans l'une, et ΣT , $\Upsilon\Phi$, $X\Psi$ dans l'autre figure. Du moment donc que le segment de droite BA est divisé par les parallèles dans le rapport des nombres impairs successifs et qu'il en est de même du segment de droite PO , du moment, de plus, que le nombre des segments partiels est le même pour BA et pour PO , il est évident que les segments partiels seront (sc. de part et d'autre) dans les mêmes rapports¹ et que les segments de droite parallèles auront les mêmes rapports. En outre, les centres de gravité des trapèzes $AEK\Gamma$ et $\Xi\Sigma T\Pi$ seront placés semblablement sur les segments de droite $\Lambda\Delta$ et ΩP , puisque le rapport de $A\Gamma$ à EK est égal² au rapport de $\Xi\Pi$ à ΣT ; de même dans les trapèzes $EZIK$ et $\Sigma\Upsilon\Phi T$ les centres de gravité diviseront semblablement les segments de droite ΛM et $\Omega\aleph$, dans les trapèzes $ZH\Theta I$ et $\Upsilon X\Psi\Phi$ les centres de gravité diviseront semblablement MN et $\aleph\gamma$, et aussi dans les triangles $HB\Theta$ et $XO\Psi$ les centres de gravité seront placés semblablement³ sur BN et sur $O\varsigma$; les trapèzes et les triangles (sc. correspondants) ont donc le même rapport⁴. Il est donc évident⁵ que, dans la figure rectiligne entière inscrite au segment $AB\Gamma$, le centre de gravité divise BA dans la même proportion dans laquelle, sur la figure inscrite au segment $\Xi O\Pi$, le centre de gravité divise OP , ce qu'il fallait démontrer.

1-3. Cf. notes compl.

4. Les trapèzes et les triangles correspondants étant semblables, ils ont entre eux les mêmes rapports que les carrés sur leurs côtés correspondants (cf. Eucl. VI, 20), c'est-à-dire :

$$\frac{A\Gamma KE}{\Xi\Pi T\Sigma} = \frac{A\Gamma^2}{\Xi\Pi^2}; \quad \frac{EKIZ}{\Sigma T\Phi\Upsilon} = \frac{EK^2}{\Sigma T^2}; \quad \text{etc.}$$

Or les rapports $\frac{A\Gamma}{\Xi\Pi}$, $\frac{EK}{\Sigma T}$, etc. étant égaux entre eux, il en est de même des rapports $\frac{A\Gamma KE}{\Xi\Pi T\Sigma}$, $\frac{EKIZ}{\Sigma T\Phi\Upsilon}$, etc.

5. D'après prop. I, 6 et 7.

- τὸν ἀριθμὸν ἔχόντων ἀλλάλοις ἴσον, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ ΒΔ, ΟΡ, καὶ ἐπέξεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ καὶ αἱ ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ. Ἐπεὶ οὖν ἃ τε ΒΔ διαιρεῖται ὑπὸ τᾶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν περισσῶν
- 5 λόγους καὶ ἃ ΡΟ, καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτὰν ἴσα ἐντί, δηλὸν ὥς τὰ τε τμάματα τῶν διαμέτρων ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται, καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐξοῦντι. Καὶ τῶν τραπεζίων τοῦ τε ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν ΛΔ, ΩΡ
- 10 εὐθειᾶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ ΑΓ, ΕΚ ταῖς ΞΠ, ΣΤ· πάλιν δὲ καὶ τῶν ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς ΑΜ, ΩΞ, καὶ τῶν ΖΗΘΙ, ΥΧΨΦ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς
- 15 ΜΝ, ΨΞ, ἐσσεῖται δὲ καὶ τῶν ΗΒΘ, ΧΟΨ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν ΒΝ, ΟΥ ὁμοίως κείμενα· ἔχοντι δὴ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. Δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ ΑΒΓ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὁμοίως
- 20 διαιρεῖ τὰν ΒΔ καὶ τοῦ ἐν τῷ ΞΟΠ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὰν ΟΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2 ΒΔ, ΟΡ mss. DEGH : bh et ms. ζ || 2-3 ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ mss. DEGH : ek mn xo ms. ζ || 3 καὶ αἱ Heiberg : καὶ DEGH || ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ mss. DEGH : cy fq 59 ms ζ || ΒΔ mss. DEGH : bh et et ms. ζ || 5 καὶ ἃ ΡΟ Heiberg : καὶ ΠΡΟ mss. DEGH om. ζ || 6 ἐν ζ : om. DEGH || 8-9 ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ mss. DEGH : al cz ms. ζ || 9 ΛΔ, ΩΡ mss. DEGH : hstΛ ms. ζ || 10 ἐπεὶ Gζ : ἐπὶ DEH || 11 ΕΚ mss. DEGH : kl ms. ζ || ΞΠ, ΣΤ mss. DEGH : dz cy ms. ζ || δὲ ζ : δὴ DEGH || καὶ DEGH : om. ζ || ΕΖΙΚ mss. DEGH : kn ms. ζ || ΣΥΦΤ mss. DEGH : eq ms. ζ || 13 τὰς — 14 διαιρέοντα ζ : om. DEGH || 13 ΑΜ, ΩΞ mss. DEGH : rsoΛ ms. ζ || ΖΗΘ mss. DEGH : in mo ms. ζ || ΥΧΨΦ τραπεζίων DEGH : f 9 trapezalibus ζ || 15 ΜΝ mss. DEGH : pr ms. ζ || 16 ΒΝ, ΟΥ mss. DEGH : bp ez ms. ζ || 17 ἔχοντι ΕΓ : ἔχωντι DH habentia ζ || δὴ Heiberg : δὲ codd. || 19 τὸ κέντρον ζ : τὸ Ο κέντρον DEGH || 20 ΒΔ mss. DEGH : bh ms. ζ || ΞΟΠ mss. DEGH : z e d ms. ζ || 21 τὰν ΟΡ Nizzius : lineam et ms. ζ ἐπὶ τὰν ΟΡ mss. DEH ἐπὶ τᾶς ΟΡ ms. G.

4.

Dans tout segment limité par une droite et une parabole, le centre de gravité est situé sur le diamètre du segment.

Soit $AB\Gamma$ un segment tel qu'il a été dit, et soit $B\Delta$ son diamètre. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment indiqué est situé sur $B\Delta$.

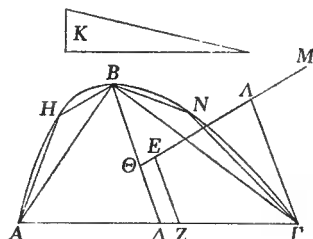


Fig. 50

S'il n'en est pas ainsi, que le centre de gravité soit le point E . Menons par E la parallèle EZ à $B\Delta$ et inscrivons au segment le triangle $AB\Gamma$ ayant même base et même hauteur que le segment ; que le rapport du triangle $AB\Gamma$ à l'aire K soit égal au rapport du segment de droite ΓZ au segment de droite $Z\Delta$. Inscrivons aussi exactement au segment une figure rectiligne, de manière que les segments restants aient une somme inférieure à l'aire K . Le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite est ainsi situé¹ sur la droite $B\Delta$. Que ce centre de gravité soit le point Θ . Joignons Θ à E et prolongeons ΘE ; menons la parallèle $\Gamma\Lambda$ à $B\Delta$. Dans ces conditions il est évident que le rapport de la figure rectiligne, inscrite au segment, à la somme des segments partiels qui restent est supérieur² au rapport

1. Cf. prop. 2.

2. Puisque la figure inscrite est supérieure au triangle $AB\Gamma$, alors que la somme des segments partiels est inférieure à l'aire K .

δ'.

Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾷς τοῦ τμήματος διαμέτρου.

- 5 Ἐστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ $AB\Gamma$, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ BD . Δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾷς BD .

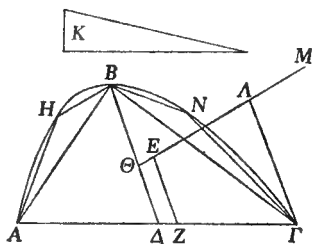


Fig. 50

- Εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ E , καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν BD ἡ EZ , καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸ τμᾶμα τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὃν ἔχει
 10 λόγον ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZD , τοῦτον ἔχέτω τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ K χωρίον· ἐγγεγράφω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ K · τοῦ δὲ ἐγγεγραφομένου εὐθυγράμμου
 15 τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾷς BD . Ἐστω τὸ Θ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘE καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ παρὰ τὰν BD ἄχθω ἡ $\Gamma\Lambda$ · δηλὸν δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὰ λειπόμενα τμήματα

6 τὸ addidi || 9 τὸ pr. add. Heiberg || 12 K mss. $DEGH$: x ms. \mathcal{L} || 14 K mss. $DEGH$: x ms. \mathcal{L} || 16 ΘE mss. $DEGH$: ke ms. \mathcal{L} || 17 δὲ Heiberg : δὲ codd.

du triangle $AB\Gamma$ à l'aire K . Mais le triangle $AB\Gamma$ est à l'aire K comme ΓZ est à $Z\Delta$, et ainsi le rapport de la figure rectiligne inscrite à la somme des segments qui restent est supérieur au rapport de ΓZ à $Z\Delta$, c'est-à-dire de ΛE à $E\Theta$. (sc. Soit M un point de la droite $\Theta\Lambda$ tel) que le rapport de ME à $E\Theta$ soit le même que celui de la figure rectiligne à la somme des segments partiels¹. Dès lors, puisque le centre de gravité du segment entier est le point E , celui de la figure rectiligne inscrite au segment le point Θ , il est évident que le centre de gravité de la grandeur restante, somme des segments partiels situés autour (sc. de la figure rectiligne inscrite), est situé² sur le prolongement de la droite ΘE de manière que le segment de droite qui en est découpé a avec le segment de droite ΘE le même rapport qu'à la figure rectiligne inscrite avec la somme des segments partiels restants. Par conséquent le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des segments partiels restants est le point M , ce qui est absurde, puisque, une parallèle à $B\Delta$ étant menée par le point M , tous les segments restants seront situés d'un même côté de cette parallèle³. Il est donc évident que le centre de gravité du segment est situé sur la droite $B\Delta$.

5.

Si on inscrit, dans un segment compris entre une droite et une parabole, exactement une figure rectiligne, le centre de gravité du segment entier est situé plus près du sommet du segment que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite.

1. Le rapport de la figure rectiligne à la somme des segments partiels devant être supérieur au rapport de ΛE à $E\Theta$, le point M se situera ainsi nécessairement sur le prolongement de $\Theta\Lambda$.

2. Cf. prop. I, 8.

3. Cf. I, post. 7 et prop. I, 13.

- ἢ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ. Ἀλλ' ὥς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ, οὕτως ἂ ΓΖ ποτὶ ΖΔ · καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἂ ΓΖ ποτὶ ΖΔ, τουτέστιν ἂ ΛΕ ποτὶ ΕΘ.
- 5 Ἐχέτω οὖν ἂ ΜΕ ποτὶ ΕΘ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν τοῦ εὐθυγράμμου ποτὶ τὰ τμήματα. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ε κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ Θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον
- 10 τοῦ βάρους ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς ΘΕ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν ΘΕ ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα. Ὡστε εἴη κα τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Μ σαμεῖον ·
- 15 ὅπερ ἄτοπον · τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Μ παρὰ τὰν ΒΔ ἀγομένας ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμήματα. Δῆλον οὖν ὅτι ἐπὶ τᾶς ΒΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους.

ε'.

- Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ
- 20 ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμήματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον.

1 K mss. DEGH : x ms. ζ || τρίγωνον add. Basil. || 1-2 ἀλλ' ὥς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ms. ζ : om. DEGH || 4 ΖΔ ms. ζ : Δ mss. DEGH || ΕΘ mss. DEGH : ek ms. ζ || 5 ΕΘ mss. DEGH : ek ms. ζ || 6 τὰ τμήματα DEGH : reliquas portiones ζ || Ε Basil. : Β mss. DEGH || 8 λοιποῦ ζ : λοιπὸν DEGH || 10 ΘΕ mss. DEGH : ke ms. ζ || 11 ΘΕ mss. DEGH : ek ms. ζ || 13 εἴη κα Heiberg : εἴη κατὰ DEH erit et ζ εἴη ἀν κατὰ Γ || 15 τᾶς Torellius : τὰ DEGH ipsa ζ || 16 ἐσσοῦνται Heiberg : ἐσσοῦντι DEGH cadent ζ || 23 εὐθυγράμμου Γζ : εὐθύγραμμον DEH.

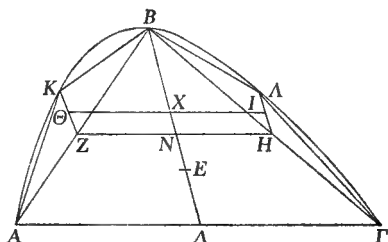


Fig. 51

Soit $AB\Gamma$ un segment tel que nous l'avons indiqué, et ΔB son diamètre ; inscrivons-y exactement un premier triangle $AB\Gamma$ et divisons $B\Delta$ par le point E de manière que BE soit double de $E\Delta$; le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est donc¹ le point E . Divisons en deux parties égales chacun des segments de droite AB et $B\Gamma$ par les points Z et H , et menons par Z et H les parallèles ZK et $H\Lambda$ à $B\Delta$; le centre de gravité du segment AKB sera ainsi² sur ZK , le centre de gravité du segment $B\Gamma\Lambda$ sur $H\Lambda$. Soit Θ et I ces centres, et menons la droite ΘI . Du moment que ΘZHI est un parallélogramme et que NH est égal³ à ZN , les segments de droite $X\Theta$ et XI sont à leur tour égaux ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée des segments AKB et $B\Gamma\Lambda$ est situé au milieu⁴ de ΘI , puisque les segments sont égaux, c'est-à-dire au point X . Mais comme le centre de gravité

1. Cf. prop. I, 14.

2. Cf. prop. 4.

3. Puisqu'on a $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BH}{H\Gamma}$, ZH est parallèle à $A\Gamma$, d'où

$\frac{ZN}{NH} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = 1$, et par conséquent $ZN = NH$.

4. Puisque $AKZ = KZB$, $BAH = AH\Gamma$, et que, de plus, $KZB = BHA$, ces triangles ayant des bases égales et même hauteur ; le triangle AKB est donc égal au triangle $B\Gamma\Lambda$; cf. *Quadr. parab.* 17.

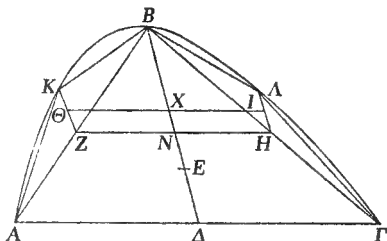


Fig. 51

Ἐστω τὸ $AB\Gamma$ τμήμα οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
 ἡ ΔB , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμῳ
 τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετράσθω ἡ BA κατὰ τὸ E , ὥστε εἶμεν
 διπλασίαν τὰν BE τῆς EA · ἔστιν οὖν τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου
 5 κέντρον τοῦ βάρους τὸ E σημείον. Τετράσθω δὴ δίχα
 ἑκάτερα τὰν AB , $B\Gamma$ κατὰ τὰ Z , H , καὶ διὰ τῶν Z , H παρὰ
 τὰν BD ἄχθωσαν αἱ ZK , $H\Lambda$ · ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν AKB
 τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ZK , τοῦ $B\Gamma\Lambda$
 τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς $H\Lambda$. Ἐστω δὲ
 10 τὰ Θ , I , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘI . Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν
 ἔστι τὸ ΘZHI , καὶ ἴσα ἔστι τῇ ZN ἡ NH , ἔστιν ἄρα καὶ ἡ
 $X\Theta$ ἴσα τῇ XI · ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν AKB , $B\Gamma\Lambda$
 τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον τοῦ βάρους
 ἔστιν ἐπὶ μέσας τῆς ΘI [ἐπειδὴ περ ἴσα ἐντὶ τμήματα],
 15 τούτέστιν τὸ X σημείον. Ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν $AB\Gamma$ τριγώνου

3 E mss. $DEGH$: n ms. \mathcal{Z} || 4 BE mss. $DEGH$: bn ms. \mathcal{Z}
 || EA mss. $DEGH$: nd ms. \mathcal{Z} || 5 E mss. $DEGH$: n ms. \mathcal{Z} ||
 6 τῶν Heiberg : τῶν codd. || 7 ΛH mss. $DEGH$: et ms. \mathcal{Z} || AKB
 mss. $DEGH$: a t b ms. \mathcal{Z} || 8 τὸ add. Heiberg || ZK mss. DE
 GH : t e ms. \mathcal{Z} || $B\Gamma\Lambda$ mss. $DEGH$: b k g ms. \mathcal{Z} || 9 τὸ κέντρον
 τοῦ βάρους $DEGH$: om. \mathcal{Z} || $H\Lambda$ mss. $DEGH$: z k ms. \mathcal{Z} ||
 10 Θ , I mss. $DEGH$: l m ms. \mathcal{Z} || 11 ΘZHI Basil. : ΘZH
 mss. $DEGH$: e z m l ms. \mathcal{Z} || 12 $X\Theta$ mss. $DEGH$: x l ms. \mathcal{Z}
 || XI · ὥστε $DEGH$: x m et quoniam aequalis est portio a t b
 portioni b k g quia \mathcal{Z} || AKB , $B\Gamma\Lambda$ mss. $DEGH$: a t b b k g ms.
 \mathcal{Z} || 14 ΘI mss. $DEGH$: l m ms. \mathcal{Z} || τμήματα $DEGH$: om. \mathcal{Z} ||
 15 X mss. $DEGH$: x ms. \mathcal{Z} || μὲν $DEGH$: om. \mathcal{Z} .

κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ E σαμείον, τοῦ δὲ συγκειμένου
 ἐξ ἀμφοτέρων τῶν AKB , BLG τὸ X , δηλὸν οὖν ὅτι ὅλου
 τοῦ τμήματος τοῦ ABG κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ
 τῆς XE , τουτέστι μεταξὺ τῶν X , E σαμείων · ὥστ' εἴη κα
 5 ἐγγύτερον τῆς τοῦ τμήματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ
 ὅλου τμήματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνω-
 ρίμως.

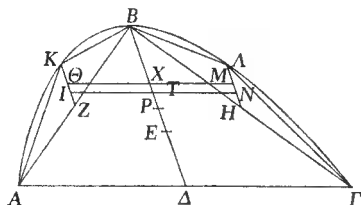


Fig. 52

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμήμα πεντάγωνον εὐθύ-
 γραμμον γνωρίμως τὸ $AKBLG$, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου
 10 τμήματος διάμετρος ἡ BD , ἐκατέρου δὲ τῶν τμημάτων
 ἐκάτερα τῶν KZ , $ΛH$ διάμετρος [καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ AKB
 τμήματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου
 τμήματος κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐγγύτερον τῆς
 κορυφᾶς ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου]. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν
 15 τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ , τοῦ δὲ τριγώνου
 τὸ I , πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν BLG τμήματος τὸ κέντρον
 τοῦ βάρους τὸ M , τοῦ δὲ τριγώνου τὸ N · ἐσσεῖται δὴ τοῦ
 μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν AKB , BLG τμημάτων συγκειμένου

1 E Basil. : h ms. \propto om. $DEGH$ || 1-2 τοῦ δὲ συγκειμένου
 ἐξ ἀμφοτέρων τῶν AKB , BLG τὸ X mss. $DEGH$: om. \propto || 2 BLG
 Torellius : $ΛΓ$ mss. $DEGH$ || 3 τοῦ τμήματος $DEGH$: om. \propto
 || 6 τὸ add. Heiberg || 11 διάμετρος Nizzius : διαμέτρων codd. ||
 15 Θ mss. $DEGH$: n ms. \propto || 16 I mss. $DEGH$: m ms. \propto ||
 17 M mss. $DEGH$: t ms. \propto || δὴ \propto : δὲ $DEGH$.

point X, le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles AKB et BAF sera le point T. De nouveau donc, puisque dans le triangle ABF le centre de gravité est E et que pour la grandeur composée des deux segments AKB et BAF le centre de gravité est X, il est évident que le centre de gravité du segment entier ABF est situé sur le segment de droite XE, en un point qui divise ce segment de manière que le rapport du segment partiel ayant pour extrémité X au segment partiel plus petit¹ soit égal au rapport du triangle ABF à la somme des segments AKB et BAF. Quant au pentagone AKBAF, son centre de gravité est situé sur ET, en un point qui divise ce segment de manière que le segment partiel ayant pour extrémité le point T soit au segment qui reste¹ comme le triangle ABF est à la somme du triangle AKB et BAF. Du moment donc que le rapport du triangle ABF à la somme des triangles KAB et ABF est supérieur² au rapport du triangle ABF à la somme des deux segments, il est évident que le centre de gravité du segment ABF est plus près du sommet B que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Le même raisonnement est valable pour toutes les figures rectilignes inscrites exactement dans les segments.

6.

Étant donné un segment compris entre une droite et une parabole, il est possible d'inscrire exactement dans ce segment une figure rectiligne de manière que le segment de droite compris entre les centres de gravité du segment (sc. de parabole) et de la figure rectiligne inscrite soit inférieur à tout segment de droite donné.

1. Cf. prop. I, 8.

2. Cf. Eucl. V, 8.

- μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων
 τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τριγώνων τὸ Τ. Πάλιν οὖν, ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ
 τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφο-
 τέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων τὸ Χ, δῆλον ὡς [τοῦ]
 5 ὅλου τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν
 ἐπὶ τᾷ ΧΕ τμαθείσας οὕτως ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ
 ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ
 τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾷ τὸ
 πέρας ἔχον τὸ Χ ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. Τοῦ δὲ ΑΚΒΛΓ
 10 πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾷ ΕΤ εὐθείας
 τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον
 ποτὶ τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ
 τμᾶμα αὐτᾷ τὸ πέρας ἔχον τὸ Τ ποτὶ τὸ λοιπόν. Ἐπεὶ
 οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ ΚΑΒ,
 15 ΑΒΓ τρίγωνα ἢ ποτὶ τὰ τμάματα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ
 ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾷς
 Β κορυφᾷς ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. Καὶ
 ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων ἐς τὰ τμάματα
 γνωρίμῳ ὁ αὐτὸς λόγος.

20

ζ'.

- Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ
 ὀρθογωνίου κώνου τομᾷς δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ τμᾶμα
 εὐθύγραμμον γνωρίμῳ ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ
 εὐθεϊᾶν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ
 25 ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν πάσας τὰς
 προτεθείσας εὐθείας.

1 Χ mss. DEGH : q ms. ζ || 3 κέντρον Gζ : κέντρου DEH
 || Ε mss. DEGH : n ms. ζ || 4 Χ mss. DEGH : q ms. ζ || τοῦ
 DEGH : del. Heiberg || 5 ἐστιν ζ : om. DEGH || 6 ΧΕ mss.
 DEGH : qn ms. ζ || 9 τοῦ δὲ DEGH : huius ζ || 10 ΕΤ mss.
 DEGH : qn ms. ζ || 13 Τ mss. DEGH : c ms. ζ || 14-15 ΚΑΒ,
 ΑΒΓ mss. DEGH : akb big ms. ζ || 17 Β mss. DEGH : om.
 ζ || 18 εὐθυγράμμων GHζ : εὐθυγράμμου DE || 19 γνωρίμῳ
 DEGH : om. ζ || 22 ἐστιν ζ : om. DEGH

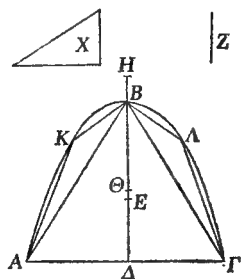


Fig. 53

Soit donné un segment $AB\Gamma$ tel qu'il a été indiqué ; soit Θ son centre de gravité ; inscrivons au segment, d'une manière exacte, le triangle $AB\Gamma$; soit Z le segment de droite donné ; que le rapport de $B\Theta$ à Z soit égal au rapport du triangle $AB\Gamma$ à une aire X . Inscrivons dès lors au segment $AB\Gamma$, d'une manière exacte, la figure rectiligne $AKB\Lambda\Gamma$, de façon que la somme des segments restants soit inférieure à l'aire X ; soit E le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Je dis donc que le segment de droite ΘE est inférieur à Z .

S'il n'en est pas ainsi, en effet, ΘE est ou bien égal ou supérieur à Z . Mais comme le rapport de la figure rectiligne $AKB\Lambda\Gamma$ à la somme des segments restants est supérieur¹ au rapport du triangle $AB\Gamma$ à X , c'est-à-dire au rapport de ΘB à Z , et que, d'autre part, le rapport de $B\Theta$ à Z n'est pas inférieur au rapport de $B\Theta$ à ΘE , parce que ΘE n'est pas inférieur² à Z , à plus forte raison le rapport de la figure rectiligne $AKB\Lambda\Gamma$ à la somme des segments restants est supérieur au rapport de $B\Theta$ à ΘE ; il s'ensuit que si nous nous donnons un autre segment de droite tel que le rapport de la figure rectiligne $AKB\Lambda\Gamma$ aux segments restants soit égal au rapport de cet autre segment à ΘE , — et cela, puisque le centre de gravité du triangle $AB\Gamma$ est Θ ,

1-2. Cf. notes compl.

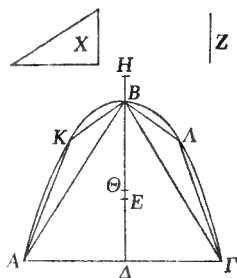


Fig. 53

- Δεδόσθω τμᾶμα τὸ $AB\Gamma$ οἷον εἴρηται, οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρους τὸ Θ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ $AB\Gamma$, καὶ ἔστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ Z , καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ $B\Theta$ ποτὶ Z , τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω
- 5 τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ποτὶ τὸ X χωρίον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ $AB\Gamma$ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ $AKB\Lambda\Gamma$, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ X , καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ E . Φαμὶ δὴ τὰν ΘE ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς Z .
- 10 Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. Ἐπεὶ δὲ τὸ $AKB\Lambda\Gamma$ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ποτὶ X , τουτέστιν ἡ ΘB ποτὶ Z , ἔχει δὲ καὶ ἡ $B\Theta$ ποτὶ Z οὐκ ἐλάσσονα λόγον ἢ ὃν ἔχει ποτὶ ΘE , διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν ΘE
- 15 τᾶς Z , πολλῶ ἄρα τὸ $AKB\Lambda\Gamma$ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ $B\Theta$ ποτὶ ΘE · ὥστε, ἐὰν ποιῶμες ὡς τὸ $AKB\Lambda\Gamma$ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα, οὕτως ἄλλαν τινα ποτὶ ΘE [ἐπειδὴ τοῦ $AB\Gamma$ τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ

3 $Z \propto : AZ$ mss. $DEGH \parallel$ 4 $Z \propto : EZ$ mss. $DEGH \parallel$ 5 X Heiberg : K mss. $DEGH$, q ms. $\propto \parallel$ 7 X Heiberg : K mss. $DEGH$, q ms. $\propto \parallel$ 12 X Heiberg : K mss. $DEGH$, g ms. $\propto \parallel$ 19 ἐπειδὴ τοῦ $AB\Gamma$ τμήματος $DEGH$: erit maior quam linea bt. Sit quae ht. Quoniam autem portionis quidem abg ms. \propto .

en prolongeant $E\Theta$ et en découpant un segment de droite ayant à $E\Theta$ le rapport de la figure rectiligne $AKBA\Gamma$ aux segments restants —, le segment de droite (sc. ainsi pris) sera supérieur¹ à ΘB . Soit donc le rapport de $H\Theta$ à ΘE (sc. égal au rapport de $AKBA\Gamma$ aux segments restants). Le point H sera donc le centre de gravité² de la grandeur composée des segments restants, ce qui est impossible, puisque (sc. tous les segments restants) sont situés d'un même côté³ de la parallèle à $A\Gamma$ menée par H . Il est donc évident que ΘE est inférieur à Z , ce qu'il fallait démontrer.

7.

Dans deux segments semblables compris entre une droite et une parabole, les centres de gravité divisent les diamètres dans le même rapport.

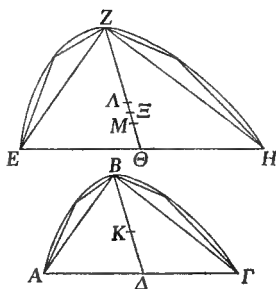


Fig. 54

Soit deux segments $AB\Gamma$ et EZH tels que nous venons de les définir, $B\Delta$ et $Z\Theta$ leurs diamètres ; soit

1. Cf. Eucl. V, 8.

2. Cf. prop. I, 8.

3. Cf. I, post. 7.

τὸ Θ, ἐκβληθείσας τᾶς ΕΘ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς
 εὐθείας ἐχούσας λόγον ποτὶ τὰν ΕΘ, ὃν τὸ ΑΚΒΛΓ
 εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμήματα], ἐσσεῖται
 μείζων τᾶς ΘΒ. Ἐχέτω οὖν ἡ ΗΘ ποτὶ ΘΕ. Τὸ Η ἄρα
 5 κέντρον τοῦ βάρους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπο-
 μένων τμαμάτων · ὅπερ ἀδύνατον · τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Η
 ἀχθείσας παρὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐστὶν [τῷ τμήματι].
 Δῆλον οὖν ὅτι ἡ ΘΕ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς Ζ · ἔδει δὲ τοῦτο
 δεῖξαι.

10

ζ'.

Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας
 καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὰ κέντρα τῶν βαρέων
 εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους.

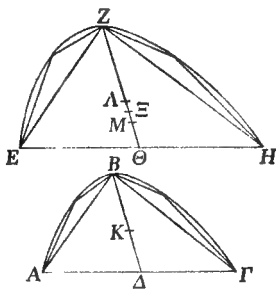


Fig. 54

Ἐστω δύο τμήματα οἷα εἴρηται τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, ὧν
 15 διαμέτροι αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμήματος

1 ἐκβληθείσας τᾶς ΕΘ mss. DEGH : rectilinei autem akblg
 signum ■ ms. ζ || 3 ἐσσεῖται — 4 ΘΕ mss. DEGH : eius quae
 ht ad te ms. ζ || 7 ἐστὶν ζ : ἥστην DEGH || τῷ τμήματι codd. :
 del. Heiberg || 8 οὖν ζ : om. DEGH || Ζ · ἔδει δὲ τοῦτο Basil. :
 ΖΕ δεῖ δὲ τοῦτο DEGH, z et hoc autem oportebat ζ || 13
 τέμνοντι EG : τέμνωντι DH.

K le centre de gravité du segment $AB\Gamma$, Λ le centre de gravité du segment EZH . Il faut démontrer que K et Λ divisent les diamètres dans le même rapport.

S'il n'en est pas ainsi (sc. soit M un point pris sur $Z\Theta$ de manière) que le rapport de ZM à $M\Theta$ soit égal au rapport de KB à $K\Delta$; inscrivons au segment EZH , d'une manière exacte, une figure rectiligne telle que le segment de droite compris entre le centre de gravité du segment (sc. de parabole) et le centre de gravité de la figure rectiligne soit inférieur¹ à ΛM ; soit Ξ le centre de gravité² de la figure rectiligne inscrite ; inscrivons au segment $AB\Gamma$ une figure rectiligne semblable, — c'est-à-dire semblablement exacte —, à celle qui est inscrite au segment EZH ; dans cette figure le centre de gravité sera plus près du sommet que le centre de gravité du segment, ce qui est impossible³. Il est donc évident que le rapport de BK à $K\Delta$ est égal au rapport de $Z\Lambda$ à $\Lambda\Theta$.

8.

Dans tout segment compris entre une droite et une parabole le centre de gravité divise le diamètre du segment de manière que la partie située du côté du sommet soit égale aux trois demis de la partie située du côté de la base.

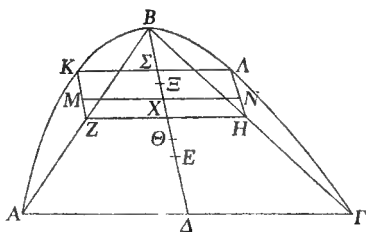


Fig. 55

1. Cf. prop. 6.

2. Le point Ξ est situé entre Λ et M, parce que $\Lambda\Xi$ est par hypothèse inférieur ΛM .

3. Cf. prop. 5.

κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ τὸ Λ. Δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ Κ, Λ.

- Εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἂ ΚΒ ποτὶ ΚΔ, οὕτως ἂ ΖΜ ποτὶ
 5 ΜΘ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΕΖΗ τμᾶμα εὐθύγραμμον
 γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος
 καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς
 ΛΜ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον
 τοῦ βάρεος τὸ Ξ σαμεῖον, ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ ΑΒΓ
 10 τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ΕΖΗ [ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ] ὁμοῖον
 εὐθύγραμμον [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως] · οὐ τὸ κέντρον
 τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἢ περ τὸ τοῦ τμάματος ·
 ὅπερ ἀδύνατον. Δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἂ
 ΒΚ ποτὶ ΚΔ, ὃν ἂ ΖΛ ποτὶ ΛΘ.

15

η'.

- Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ
 ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ
 τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἀμιόλιον τὸ
 μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τῇ κορυφῇ τοῦ τμάματος τοῦ ποτὶ τῇ
 20 βάσει.

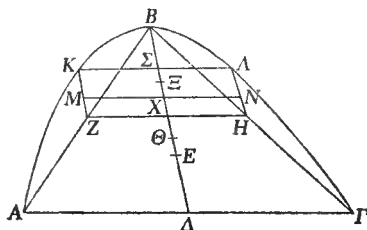


Fig. 55

1 Α ms. χ : Δ mss. DEGH || 2 τέμνοντι EG : τέμνωντι DH
 secantur χ || τὰς διαμέτρους τὰ Κ, Α mss. DEGH : quae bd zt
 ms. χ || 11 οὐ τὸ Nizzius : οὐ codd. || 12 τὸ χ : om. DEGH ||
 19-20 τῇ βάσει Heiberg : τὰν βάσιν codd.

Soit $AB\Gamma$ un segment tel que nous l'avons indiqué ; soit $B\Delta$ son diamètre et Θ son centre de gravité. Il faut démontrer que le segment de droite $B\Theta$ est égal à une fois et demie le segment de droite $\Theta\Delta$.

Inscrivons de manière exacte dans le segment $AB\Gamma$ le triangle $AB\Gamma$; soit E son centre de gravité. Divisons en deux parties égales les deux segments de droite AB et $B\Gamma$ (sc. par les points Z et H) et menons KZ et $H\Lambda$ (sc. parallèlement à $B\Delta$) ; KZ et $H\Lambda$ sont donc les diamètres des segments AKB et $B\Lambda\Gamma$. Soit M le centre de gravité¹ du segment AKB , N celui du segment $B\Lambda\Gamma$; menons les droites ZH , MN et $K\Lambda$. Le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux segments est donc le point X ; et puisque KM est à MZ comme² $B\Theta$ est à $\Theta\Delta$, par composition³ et par permutation⁴ $\Delta\Theta$ est à MZ comme $B\Delta$ est à KZ ; mais $B\Delta$ est le quadruple de KZ , comme nous le démontrerons à la fin à l'endroit marqué par le signe \mathcal{S} . Il s'ensuit que $\Delta\Theta$ est à son tour le quadruple de MZ , de façon que le reste $B\Theta$ est lui aussi le quadruple du reste KM , c'est-à-dire⁵ de ΣX . Par conséquent, la somme des restes $B\Sigma$ et $X\Theta$ est le triple de ΣX . Que le segment de droite $B\Sigma$ soit le triple de ΣE ; le segment de droite $X\Theta$ est alors lui aussi le triple de $E X$. Et comme $B\Delta$ est le quadruple de $B\Sigma$, — car cela aussi se démontre —, et que $B\Sigma$ est le triple de ΣE , le segment de droite ΞB est la troisième partie de $B\Delta$. Mais le segment de droite $E\Delta$ est lui aussi la troisième partie de ΔB , puisque le point E est le centre de gravité⁶ du triangle $AB\Gamma$. Il s'ensuit que le reste ΞE est la troi-

1. Cf. prop. 4.

2. Cf. prop. 7.

3. Cf. Eucl. V, 18.

4. Cf. Eucl. V, 16.

5. Puisque $KMX\Sigma$ est un parallélogramme.

6. Cf. prop. I, 14.

Ἐστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἃ ΒΔ, κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον. Δεικτέον ὅτι ἁμιολία ἐστὶν ἃ ΒΘ τᾶς ΘΔ.

- Ἐγγεγράφθω ἐς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον
- 5 τὸ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ Ε, καὶ τετράσθω δίχα ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἄχθων αἱ ΚΖ, ΗΛ · διαμέτροι ἄρα ἐντὶ τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τραμάτων. Ἐστω οὖν τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ ΒΛΓ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΜΝ, ΚΛ · τοῦ ἄρα ἐξ
- 10 ἀμφοτέρων τῶν τραμάτων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Χ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἃ ΒΘ ποτὶ ΘΔ, οὕτως ἃ ΚΜ ποτὶ ΜΖ, καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ὡς ἃ ΒΔ ποτὶ ΚΖ, οὕτως ἃ ΔΘ ποτὶ ΜΖ, τετραπλασία ἢ ἃ ΒΔ τᾶς ΚΖ · τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δεικνύται, οὗ σαμεῖον
- 15 \int · τετραπλασίων ἄρα καὶ ἃ ΔΘ τᾶς ΜΖ · ὥστε καὶ λοιπὰ ἃ ΒΘ λοιπᾶς τᾶς ΚΜ, τουτέστι τᾶς ΣΧ, τετραπλασίων. Καὶ λοιπὰ ἄρα συναμφοτέρα ἃ ΒΣ, ΧΘ τριπλασίων τᾶς ΣΧ. Ἐστω τριπλασία ἃ ΒΣ τᾶς ΣΞ · καὶ ἃ ΧΘ ἄρα τᾶς ΞΧ ἐστὶ τριπλασία. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἃ ΒΔ
- 20 τᾶς ΒΣ · καὶ γὰρ τοῦτο δεικνύται · ἃ δὲ ΒΣ τᾶς ΣΞ τριπλασίων, ἃ ΞΒ ἄρα τᾶς ΒΔ τρίτον μέρος ἐστίν. Ἐστὶν δὲ καὶ ἃ ΕΔ τᾶς ΔΒ τρίτον μέρος, ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐστὶ τὸ Ε · καὶ λοιπὰ ἄρα

1 οἷον \int : ὁμοῖον ὡς DEGH || 4 ΑΒΓ ms. \int : ΑΒΔ mss. DEGH || 5 οὗ DEGH : οὗ τὸ \int || 6 τῶν \int : τῶν G τὰ DEH || ΑΒ, ΒΓ ms. \int : ΒΑ, ΑΓ mss. DEGH || ΗΛ ms. \int : ΛΗ ms. G, H mss. DEH || 9 Ν ms. \int : Η mss. DEGH || ΖΗ mss. DEGH : om. \int || 13 ΚΖ Heiberg : τὰν ΚΖ ms. G τᾶς ΚΖ mss. DEH || 13 οὕτως — 14 ΚΖ Eutocius : ita quae td ad mz, quae autem db quadrupla ipsius kz ms. \int om. DEGH || 14-15 οὗ σαμεῖον \int Eutocius : οὗ σαμεῖον ὁ ἥλιος DEGH om. \int || 16 ΣΧ mss. DEGH : qc ms. \int || 17 λοιπὰ Heiberg : λοιπὸν DEGH om. \int || ΒΣ mss. DEGH : cb ms. \int || 18 τριπλασία Η : τριπλᾶ DEG || ΣΞ Heiberg : cx ms. \int ΞΞ mss. DEGH || 19 ΞΧ ἐστὶ DEGH : qx ms. \int || ἐστὶν \int : om. DEGH || 23 ἐστὶ DEGH : om. \int .

sième partie de $B\Delta$. Comme, de plus, le centre de gravité du segment entier est le point Θ , celui de la grandeur composée des segments AKB et $BA\Gamma$ le point X , et celui du triangle $AB\Gamma$ le point E , le segment de droite $X\Theta$ sera au segment ΘE comme le triangle $AB\Gamma$ est à la somme des segments qui restent¹. Mais le triangle $AB\Gamma$ est équivalent au triple de la somme des segments, puisque le segment entier est équivalent aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$; $X\Theta$ est donc aussi le triple de ΘE . Or il a été démontré que $X\Theta$ est le triple de $X\Xi$; par conséquent, ΞE est le quintuple de $E\Theta$, ce qui revient à dire que ΔE est le quintuple de $E\Theta$, du moment que ΞE et ΔE sont égaux; $\Delta\Theta$ est ainsi sextuple de ΘE . De plus, $B\Delta$ est le triple de ΔE ; le segment de droite $B\Theta$ est donc égal aux trois demis du segment $\Theta\Delta$, ce qu'il fallait démontrer.

9.

Quatre segments de droite étant proportionnels en proportion continue, si on se donne un segment tel que son rapport aux trois cinquièmes de l'excès du plus grand des segments proportionnels sur le troisième soit égal au rapport du plus petit de ces segments à l'excès du plus grand sur le plus petit, et un second segment tel que son rapport à l'excès du plus grand des segments proportionnels sur le troisième soit égal au rapport entre la somme du double du segment le plus grand parmi les segments proportionnels, du quadruple du deuxième de ces segments, du sextuple du troisième et du triple du quatrième, d'une part, et, d'autre part, la somme du quintuple du plus grand segment, du décuple du second, du décuple du troisième et du quintuple du quatrième, la somme des deux

1. Cf. prop. I, 8.

- ἀ ΞΕ τρίτον μέρος τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος
κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων
τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον
τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Ε, ἐσσεῖται
5 ὡς τὸ ΑΒΓ τριγώνον ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τμήματα,
οὕτως ἀ ΧΘ ποτὶ ΘΕ. Τριπλάσιον δὲ τὸ ΑΒΓ τριγώνον
τῶν τμημάτων [ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμήμα ἐπίτρίτον ἐστι
τοῦ ΑΒΓ τριγώνου] · τριπλασία ἄρα καὶ ἀ ΧΘ τῆς ΘΕ.
Ἐδείχθη δὲ ἀ ΧΘ τριπλασία καὶ τῆς ΧΞ · πενταπλασία
10 ἄρα ἐστὶν ἀ ΞΕ τῆς ΕΘ, τουτέστιν ἀ ΔΕ τῆς ΕΘ · ἴσα
γάρ ἐστιν αὐτᾶ · ὥστε ἐξαπλασία ἐστὶν ἀ ΔΘ τῆς ΘΕ.
Καὶ ἐντὶ τῆς ΔΕ τριπλασία ἀ ΒΔ · ἀμιολία ἄρα ἐντὶ ἀ
ΒΘ τῆς ΘΔ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

- 15 Εἰ κα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον ἔωντι ἐν τῇ συνεχεῖ
ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἀ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν,
ῥ ὑπερέχει ἀ μεγίστα τῆς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά
τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τῆς ὑπεροχᾶς,
ῥ ὑπερέχει ἀ μεγίστα τῶν ἀνάλογον τῆς τρίτας, ὃν δὲ
20 ἔχει λόγον ἀ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τῆς μεγίστας τῶν ἀνάλογον
καὶ τῇ τετραπλασίᾳ τῆς δευτέρας καὶ τῇ ἐξαπλασίᾳ
τῆς τρίτας καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς τετάρτας ποτὶ τὰν ἴσαν
τῇ τε πενταπλασίᾳ τῆς μεγίστας καὶ τῇ δεκαπλασίᾳ
τῆς δευτέρας καὶ τῇ δεκαπλασίᾳ τῆς τρίτας καὶ τῇ
25 πενταπλασίᾳ τῆς τετάρτας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ
ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ῥ ὑπερέχει ἀ μεγίστα τῶν ἀνάλογον

6 τριπλάσιον Heiberg : τριπλοῦν codd. et Eutocius || 8 ΧΘ ms. DEGH : tq ms. ζ || 9 καὶ DEGH : om. ζ || 13 ὅπερ ἔδει δεῖξαι ζ et Eutocius : om. DEGH || 17 ῥ Gζ : ἄς DEH || 20 διπλασία Heiberg : β DEGH || ἀνάλογον Basil. : ἀναλογίαν codd. || 25 πενταπλασία G : πενταπλησία DEH || 26 τῶν Torellius : τῶς DEGH.

segments pris sera égale aux deux cinquièmes du segment le plus grand¹.

Soit quatre segments proportionnels AB, BΓ, BΔ, BE ; (sc. soit ZH un segment tel) que le rapport de ZH aux trois cinquièmes de AΔ soit égal au rapport de BE à EA ; (sc. soit HΘ un segment tel) que le rapport de HΘ à AΔ soit égal au rapport entre la somme de 2 AB, de 4 BΓ, de 6 BΔ et de 3 BE, d'une part, et la somme de 5 AB, de 10 ΓB, de 10 BΔ et de 5 BE d'autre part. Il faut démontrer que ZΘ est égal aux deux cinquièmes de AB.

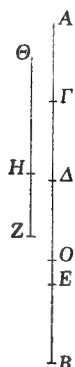


Fig. 56

Puisque, en effet, AB, BΓ, BΔ, BE sont proportionnels, les segments AΓ, ΓΔ, ΔE sont dans le même rapport², et le rapport de la somme de AB et de BΓ à BΔ, c'est-à-dire de la double somme de AB et de BΓ au double de BΔ, est égal³ au rapport de AΔ à ΔE et au rapport de la somme de ΔB et de BΓ à EB et au rapport de tous les segments à tous les segments⁴ ; il s'ensuit que le rapport de AΔ à ΔE est égal au rapport entre la somme du double de AB, du triple de ΓB et de ΔB, d'une part, et la somme du double de BΔ et de BE, d'autre part, alors que le rapport entre la somme du double de AB, du quadruple de BΓ, du quadruple de BΔ et du double de BE, d'une part, et la somme du double de ΔB et de EB, d'autre part, est égal au rapport de ΔA à un segment inférieur à ΔE. Soit donc ΔO ce dernier segment. Or la somme de ces derniers segments aura le même rapport aux premières⁵ ;

1. Cf. notes compl.

2. C'est-à-dire on a $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$; cf. Eucl. V, 16 et 17.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. D'une façon plus précise : de tous les segments antécédents à tous les segments conséquents.

5. C'est-à-dire on aura : $\frac{A\Delta}{\Delta O} = \frac{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}{2\Delta B+EB}$.

τῆς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπταμόρια τῆς μεγίστας.

Ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, τοῦτον
 5 ἔχέτω ἡ ΖΗ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τῆς ΑΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴσα τῇ διπλασίᾳ τῆς ΑΒ καὶ τετραπλασίᾳ τῆς ΒΓ καὶ ἑξαπλασίᾳ τῆς ΒΔ καὶ τριπλασίᾳ τῆς ΒΕ ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ πενταπλασίᾳ τῆς ΑΒ καὶ δεκαπλασίᾳ τῆς ΓΒ καὶ
 10 δεκαπλασίᾳ τῆς ΒΔ καὶ πενταπλασίᾳ τῆς ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸν λόγον ἡ ΗΘ ποτὶ τὴν ΑΔ. Δεικτέον ὅτι ἡ ΖΘ δύο πενταμόρια ἐντὶ τῆς ΑΒ.

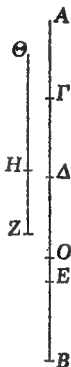


Fig. 56

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν ἐντι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί,
 15 καὶ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ ποτὶ τὴν ΒΔ, τουτέστιν ἡ διπλασία συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ ποτὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΑΔ ποτὶ τὴν ΔΕ, καὶ συναμφότερος ἡ ΔΒ, ΒΓ ποτὶ τὴν ΕΒ, καὶ πάντα ποτὶ πάντα τὸν αὐτὸν
 20 ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΔ ποτὶ τὴν ΔΕ, ὃν ἡ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΑΒ καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς ΓΒ καὶ τῇ ΔΒ ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΒΔ καὶ τῇ ΒΕ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΑΒ καὶ τῇ τετραπλασίᾳ τῆς ΒΓ καὶ τῇ τετραπλασίᾳ τῆς ΒΔ καὶ τῇ διπλασίᾳ τῆς ΒΕ
 25 ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΔΒ καὶ τῇ ΕΒ, τοῦτον ἔξει ἡ ΔΑ ποτὶ ἐλάσσονα τῆς ΔΕ. Ἐχέτω οὖν ποτὶ ΔΟ. Καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι

11 ποτὶ τὴν ΑΔ mss. CDEGH : om. ζ || 12 ἡ ΖΘ ms. ζ : τὰ ΑΖΘ mss. CDEGH || 14 ΒΕ mss. ΒΗ : ΔΕ mss. CDEG || 17-18 τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΑΔ ποτὶ add. Heiberg || 21 καὶ τῇ ΔΒ Heiberg : καὶ ἡ ΔΒ codd. || 22 τῇ alt. Ε : τὴν BCDGH || 23 ΑΒ mss. ΒΓ : Β mss. DEGH || καὶ τῇ τετραπλασίᾳ BDEGH : καὶ τῇ Δ ms. C || 25 τῇ alt. Ε : τὴν BCDGH || 26 ΔΟ Torellius : ΔΘ codd. || 27 δὲ BDEGH : om. C.

le rapport de OA à $A\Delta$ sera donc égal¹ au rapport entre la somme de deux AB , de quatre ΓB , de six $B\Delta$ et de trois BE , d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de EB et de la quadruple somme de ΓB et $B\Delta$, d'autre part. Mais le rapport de $A\Delta$ à $H\Theta$ est aussi égal au rapport du segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de $B\Delta$, d'une part, au segment composé de deux AB , de quatre ΓB , de trois EB et de six $B\Delta$, d'autre part. Or les rapports étant ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire en proportion perturbée, par raison d'identité le rapport de OA à $H\Theta$ est égal² au rapport du segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de $B\Delta$, d'une part, au segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de $B\Delta$, d'autre part. Mais le rapport entre le segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de $B\Delta$, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de $B\Delta$, d'autre part, est égal au rapport de cinq à deux ; il s'ensuit que AO est à $H\Theta$ dans le rapport de cinq à deux. D'autre part, puisque le rapport de OA à ΔA est égal³ au rapport de la somme de EB et de deux $B\Delta$ au segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de $B\Delta$, et que le rapport de $A\Delta$ à ΔE est égal au rapport entre la somme de deux AB , de trois ΓB et de $B\Delta$,

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 18.

2. Cf. Eucl. V, 23.

3. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

λόγον · ἔξει οὖν ἡ ΟΑ ποτὶ ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ
 ἴσα τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΑΒ καὶ τετραπλασίᾳ τῆς ΓΒ καὶ
 ἑξαπλασίᾳ τῆς ΒΔ καὶ τριπλασίᾳ τῆς ΒΕ ποτὶ τὰν
 συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρας τῆς
 5 ΑΒ, ΕΒ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ.
 Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΔ ποτὶ ΗΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ πεντα-
 πλασία συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας
 συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε
 τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ τῆς τετραπλασίας τῆς ΓΒ
 10 καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΕΒ καὶ ἑξαπλασίας τῆς ΒΔ ·
 ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τετα-
 ραγμένῃ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΟΑ
 ποτὶ ΗΘ, ὃν ἡ πενταπλασία συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ
 μετὰ τῆς δεκαπλασίας τῶν ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν
 15 ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς
 τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ. Ἄλλ' ἡ
 συγκειμένα ἔκ τε τῆς πενταπλασίας συναμφοτέρου τῆς
 ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ
 ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρου
 20 τῆς ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ,
 ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο · καὶ ἡ ΑΟ ἄρα ποτὶ
 ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΟΔ ποτὶ
 ΔΑ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΕΒ μετὰ τῆς διπλασίας
 τῆς ΒΔ ποτὶ τὰν ἴσαν τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς διπλασίας
 25 συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας
 συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ, ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΔ ποτὶ ΔΕ,
 οὕτως ἡ συγκειμένα ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ

1 ΟΑ Basil. : ΘΑ mss. BDEGH, ΕΑ ms. C || 2 καὶ τετρα-
 πλασίᾳ τῆς ΓΒ add. Basil. || 12 ἡ ΟΑ Basil. : ἡ ΑΟ ms. G ἡ
 Α mss. DEH ὡς Α ms. C || 13 πενταπλασία Β : ■ C, Δε mss.
 DEGH || 14 τῶν Heiberg : τῆς CDEGH utriusque Β || συγκει-
 μέναν BDEGH : κειμέναν C || 22 ΟΔ Basil. : ΘΔ codd. || 24 τῇ
 συγκειμένῃ CG : τὰν συγκειμέναν BDEH || 26 ΑΔ Basil. : ΔΒ
 codd.

d'une part, et la somme de EB et de deux BΔ, et comme les rapports sont ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire comme la proportion est perturbée, le rapport de OΔ à ΔE est égal, par raison d'identité¹, au rapport entre la somme de deux AB, de trois BΓ et de BΔ, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ, d'autre part ; par conséquent, le rapport de OE et EΔ est aussi égal² au rapport entre la somme de ΓB, de trois BΔ et de deux EB, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ. Mais le rapport de ΔE à EB est aussi égal au rapport de AΓ à ΓB, — du moment que par composition³ (sc. AB est à BΓ comme ΔB est à EB) —, et au rapport de trois ΓΔ à trois ΔB et au rapport de deux ΔE à deux EB ; il s'ensuit que le rapport de la somme de AΓ, de trois ΓΔ et de deux ΔE à la somme de ΓB, de trois ΔB et de deux EB, lui aussi (sc. est égal⁴ au rapport de ΔE à EB). Or les rapports étant de nouveau ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire en proportion perturbée, par raison d'identité le rapport de EO à EB est égal au rapport de la somme de AΓ, de trois ΓΔ et de deux ΔE au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ ; le rapport du segment entier OB à BE est donc égal⁵ au rapport de la somme de trois AB, de six ΓB et de trois BΔ au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ. Du

1. Cf. Eucl. V, 23.

2. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 19.

3. Cf. Eucl. V, 17.

4. Puisque $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{2\Delta E}{2EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{3\Gamma\Delta}{3\Delta B}$, d'où l'on déduit

$\frac{A\Gamma + 2\Delta E + 3\Gamma\Delta}{\Gamma B + 2EB + 3\Delta B} = \frac{2\Delta E}{2EB}$

5. Cf. Eucl. V, 18.

- τριπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ ποτὶ τὴν ἴσαν τῇ τε ΕΒ
καὶ τῇ διπλασίᾳ τῆς ΒΔ, ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων
τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας ἐούσας τῆς ἀνα-
λογίας, δι' ἴσου ὡς ἡ ΟΔ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἡ διπλασία
5 τῆς ΑΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΓ καὶ ἡ ΒΔ ποτὶ τὴν
συγκειμέναν ἐκ τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ
καὶ τῆς τετραπλασίας τῶν ΓΒ, ΒΔ · ὥστε καὶ ὡς ἡ ΟΕ ποτὶ
ΕΔ ἐστίν, οὕτως ἡ ΓΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΔ καὶ
διπλασίας τῆς ΕΒ ποτὶ τὴν διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς
10 ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ.
Ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΔΕ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΓ ποτὶ ΓΒ,
ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν, καὶ ἡ τριπλασία τῆς ΓΔ ποτὶ
τὴν τριπλασίαν τῆς ΔΒ καὶ ἡ διπλασία τῆς ΔΕ ποτὶ
τὴν διπλασίαν τῆς ΕΒ · ὥστε καὶ ἡ συγκειμένα ἕκ τε τῆς
15 ΑΓ καὶ τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ διπλασίας τῆς ΔΕ ποτὶ
τὴν συγκειμέναν ἕκ τε τῆς ΓΒ καὶ τριπλασίας τῆς ΔΒ καὶ
διπλασίας τῆς ΕΒ. Ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων
τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου
τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἡ ΕΟ ποτὶ ΕΒ, ὃν ἡ ΑΓ μετὰ τῆς
20 τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ διπλασίας τῆς ΔΕ ποτὶ τὴν
διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετρα-
πλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ · ὅλα οὖν ἡ ΟΒ ποτὶ
ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ἴσα τῇ τε τριπλασίᾳ τῆς
ΑΒ μετὰ τῆς ἐξαπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς
25 ΒΔ ποτὶ τὴν διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΕ μετὰ
τῆς τετραπλασίας συναμφοτέρου τῆς ΓΒ, ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ

2 ΒΔ Basil. : ΗΒΔ codd. || 3 τεταγμένων G : dispositis B τε-
μημένων CDEH || τεταραγμένας BCG : τεταραγμένος DEH ||
4 ΟΔ ins. C : ΘΔ mss. BDEGH || διπλασία B : β DEGH, αβ
C || 7 τῶν Heiberg : τῆς CDEGH om. B || ὡς CDEGH : om. B
|| ΟΕ ms. C : ΘΕ mss. BDEGH || 8 οὕτως C : ὡς BDEGH ||
16 ΔΒ mss. BDEGH : ΒΔ ms. C || 19 ΕΟ ms. C : ΕΘ mss.
BDEGH || 20 τριπλασίας τῆς add. Basil. || τὴν add. Heiberg ||
22 ΟΒ ms. C : ΕΒ mss. BDEGH.

moment, d'autre part, que $E\Delta$, $\Delta\Gamma$, ΓA et les sommes de EB et $B\Delta$, de ΔB et $B\Gamma$, de ΓB et BA sont dans le même rapport¹, le rapport de $E\Delta$ à ΔA sera égal au rapport de la somme de EB et $B\Delta$ à la somme de ΔB , $B\Gamma$, ΓB et BA . Par composition donc le rapport de AE à $A\Delta$ est égal au rapport du segment composé de la somme de EB et $B\Delta$, de la somme de AB et $B\Gamma$ et de la somme de ΓB et $B\Delta$, c'est-à-dire du segment composé de la somme de EB et de BA et de la double somme de ΔB et de $B\Gamma$, à la somme de $B\Delta$, de BA et de deux $B\Gamma$; il s'ensuit que le rapport du double au double sera aussi le même; en d'autres termes, EA est à $A\Delta$, comme le segment composé de la double somme de EB et BA et de la quadruple somme de ΓB et $B\Delta$ est au segment composé de la double somme de AB et $B\Delta$ et du quadruple de ΓB ; par conséquent le rapport de EA aux trois cinquièmes de $A\Delta$ sera aussi égal au rapport du segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et $B\Delta$ aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et $B\Delta$ et du quadruple de ΓB ; mais le rapport de EA aux trois cinquièmes de $A\Delta$ est égal² au rapport de EB à ZH ; le rapport de EB à ZH est donc égal au rapport du segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΔB et $B\Gamma$ aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et $B\Delta$ et du quadruple de ΓB . Mais on a montré aussi que le rapport de OB à EB est égal au rapport du segment composé de la triple somme de AB et $B\Delta$ et du sextuple de ΓB au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et $B\Delta$.

1. Cf. Eucl. V, 12.

2. Parce que par hypothèse $\frac{EB}{AE} = \frac{ZH}{\frac{3}{5} A\Delta}$; cf. Eucl. V, 16.

- αἶ τε ΕΔ, ΔΓ, ΓΑ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντὶ καὶ συναμφότερος ἐκάστα τὰν ΕΒ, ΒΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΒ, ΒΑ, ἐσσεῖται καὶ ὡς ἂ ΕΔ ποτὶ ΔΑ, οὕτως συναμφότερος ἂ ΕΒ, ΒΔ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΔΒ, ΒΓ μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς
- 5 ΓΒ, ΒΑ. Καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἂ ΑΕ ποτὶ ΑΔ, οὕτως συναμφότερος ἂ ΕΒ, ΒΔ μετὰ συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΓ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ, ὃ ἐστὶ συναμφότερος ἂ ΕΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΒΔ, ΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας τᾶς ΒΓ.
- 10 ὥστε καὶ ἂ διπλασία ποτὶ τὰν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἂ ΕΑ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἂ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΕΒΑ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. ὥστε καὶ ὡς ἂ
- 15 ΕΑ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἂ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. Ἄλλ' ὡς ἂ ΕΑ ποτὶ
- 20 τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἐστὶν ἂ ΕΒ ποτὶ ΖΗ. καὶ ὡς ἄρα ἂ ΕΒ ποτὶ ΖΗ, οὕτως ἂ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας
- 25 τᾶς ΓΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἂ ΟΒ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἂ τριπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα

5 ἐστὶν CDEGH : om. B || ὡς BC : om. DEGH || ἂ ΑΕ Heiberg : ΑΕ mss. BDEGH, ἂ Ε ms. C || 6 ΑΒ mss. BDEGH : ΔΒ ms. C || 9 ΒΑ ms. C : ΔΑ mss. BDEGH || 14 ΓΒ ms. C : ΓΕ mss. BDEGH || 21-22 οὕτως ἂ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας BDEGH : καὶ ὡς ἄρα ἂ. Β ms. C || 25 ΟΒ ms. C : ΑΒ mss. BDEGH.

Par raison d'identité¹, le rapport de OB à ZH est donc égal au rapport du segment composé de la triple somme de AB et BΔ et du sextuple de ΓB aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB. Mais le rapport du segment composé de la triple somme de AB et BΔ et du sextuple de ΓB au segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB est égal² au rapport de trois à deux, alors que son rapport aux trois cinquièmes du dernier segment est égal au rapport de cinq à deux ; mais on a montré que le rapport de AO à HΘ est lui aussi égal au rapport de cinq à deux ; il s'ensuit que le rapport du segment entier BA au segment entier ZΘ est égal³ au rapport de cinq à deux. Dès lors, ZΘ est égal aux deux cinquièmes de AB, ce qu'il fallait démontrer⁴.

10.

Dans tout tronc⁵ découpé d'une parabole, le centre de gravité est situé sur le diamètre du tronc, en un point déterminé de la manière que voici : le diamètre ayant été divisé en cinq parties égales, le point (sc. centre de gravité) sera situé sur la cinquième partie du milieu de manière que le rapport du segment partiel, de cette cinquième partie du milieu, qui est plus près de la plus petite base du tronc, au segment partiel restant est égal au rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur la plus grande base du tronc et pour hauteur le segment composé du double de la petite base et de la grande base, au corps solide, ayant pour base le carré sur la plus petite des bases du tronc et pour

1. Cf. Eucl. V, 22.

2. Cf. Eucl. VI, 16.

3. Cf. Eucl. V, 12.

4. Cf. notes compl.

5. Par le terme tronc de parabole il faut entendre un fragment de parabole compris entre deux droites parallèles.

- ἐστὶν ὡς ἂν **OB** ποτὶ **ZH**, οὕτως ἂν συγκειμένα ἔκ τε τῆς
 τριπλασίας συναμφοτέρου τῆς **ABΔ** καὶ ἑξαπλασίας τῆς
ΓΒ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένας ἔκ τε τῆς
 διπλασίας συναμφοτέρου τῆς **ABΔ** καὶ τετραπλασίας
 5 τῆς **ΓΒ**. Ἀλλὰ ἂν συγκειμένα ἔκ τε τῆς τριπλασίας
 συναμφοτέρου τῆς **ABΔ** καὶ ἑξαπλασίας τῆς **ΓΒ** ποτὶ μὲν
 τὰν συγκειμένων ἔκ τε τῆς διπλασίας συναμφοτέρου τῆς
ABΔ καὶ τετραπλασίας τῆς **ΓΒ** λόγον ἔχει, ὃν τρία ποτὶ
 δύο, ποτὶ δὲ τὰ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν
 10 πέντε ποτὶ δύο · ἐδείχθη δὲ καὶ ἂν **AO** ποτὶ **HΘ** λόγον
 ἔχουσα, ὃν πέντε ποτὶ δύο · καὶ ὅλα ἄρα ἂν **BA** ποτὶ
 ὅλαν τὰν **ZΘ** λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. Εἰ δὲ τοῦτο,
 δύο πεμπταμορία ἐντι ἂν **ZΘ** τῆς **AB** · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

- 15 Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρου-
 μένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐστὶν, ἃ
 διάμετρος ἐστὶ τοῦ τόμου, τόνδε τὸν τρόπον κείμενον ·
 διαιρεθείσας τῆς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπτα-
 μορίου, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τῆς ἐλάσσονος
 20 βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχειν
 λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον
 τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν
 ἴσων συναμφοτέρᾳ τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ἐλάσσονος τῶν
 βάσεων καὶ τῇ μείζονι, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον
 25 τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῶν βάσεων τοῦ

1 ἐστὶν CDEGH : om. B || OB Basil. : EB codd. || 3 τρία
 DEGH : γ C || 6 ἑξαπλασίας C : ἐκ τοῦ DEGH ex tripla
 ipsius g b ms. B || 10 AO ms. G : A mss. CDEH, a ms. B ||
 11 BA Basil. : BΘ mss. CDEH, BΔ mss. BG || 13 δύο BDE
 GH : om. C || AB mss. CG : ΔB mss. BDEH || ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι B : οἱ CDEGH || 16 & CGζ : om. DEH || 17 τὸν add.
 Heiberg || 24 τῷ C : τῷ EG τὸ D.

hauteur le segment composé du double de la grande base et de la petite base.

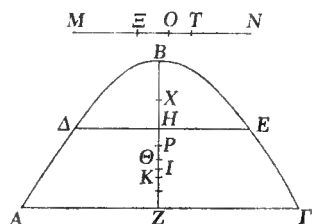


Fig. 57

Soit dans une parabole les deux droites (sc. parallèles) $A\Gamma$ et ΔE , et soit BZ le diamètre du segment (sc. de parabole) $AB\Gamma$; il est dès lors clair aussi que dans le tronc $A\Delta E\Gamma$ le diamètre¹ est HZ et que $A\Gamma$ et ΔE sont parallèles à la tangente au segment en B ; le segment de droite HZ ayant été divisé en cinq parties égales, soit ΘK le cinquième situé au milieu; que le rapport de ΘI à IK soit égal au rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur AZ et pour hauteur la somme de deux ΔH et de AZ , au corps solide ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur la somme de deux AZ et de ΔH . Il faut démontrer que le centre de gravité du tronc $A\Delta E\Gamma$ est le point I .

Soit MN un segment égal à ZB , NO un segment égal à HB ; prenons la moyenne proportionnelle NE

1. Parce que $\Delta H = HE$ et $AZ = Z\Gamma$; cf. *Quadr. parab.*, 1.

τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρῃ τῇ τε διπλασίᾳ τῆς μείζονος καὶ τῇ ἐλάσσονι αὐτῶν.

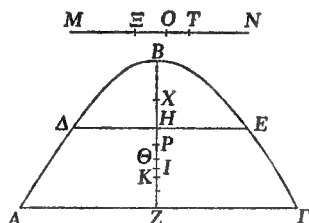


Fig. 57

Ἐστῶσαν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι αἱ
 ΑΓ, ΔΕ, διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἡ ΒΖ ·
 5 φανερόν δὴ ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου διάμετρος ἐστὶν ἡ
 ΗΖ [καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΕ παράλληλοί ἐντι τῇ κατὰ τὸ Β
 ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς] · καὶ τῆς ΗΖ εὐθείας διαιρεθείσας
 εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπτamόριον ἡ ΘΚ, ἡ δὲ ΘΙ
 ποτὶ τὰν ΙΚ τὸν αὐτὸν ἔχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν
 10 τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὕψος
 δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῇ τε διπλασίᾳ τῆς ΔΗ καὶ τῇ
 ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ τετρά-
 γωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῇ διπλασίᾳ τῆς ΑΖ
 καὶ τῇ ΔΗ. Δεικτέον ὅτι τοῦ ΑΔΕΓ τόμου κέντρον ἐστὶ
 15 τοῦ βάρεος τὸ Ι σημεῖον.

Ἐστω δὴ τῇ μὲν ΖΒ ἴσα ἡ ΜΝ, τῇ δὲ ΗΒ ἴσα ἡ ΝΟ, καὶ

1 ἀμφοτέρῃ Γ : ἀμφοτέρας CDEH || 3 ἐν ζ : om. CDEGH
 || 5 δὴ C : δὲ DEGHζ || ΑΔΕΓ τόμου διάμετρος ἐστὶν ἡ ΗΖ
 ms ζ : om. CDEGH || 6 καὶ αἱ μὲν Basil. : et quae quidem
 ζ om. CDEGH || τῇ CDEGH : om. ζ || 7 ΗΖ ms. ζ : ΕΖ
 mss. CDEGH || 10 ΑΖ mss. Gζ : ΑΖ mss. CDEH || τετρά-
 γωνον GHζ : τετραγώνων CDE || 11 ΔΗ mss. Gζ : ΖΗ mss.
 CDEH || 14 ΑΔΕΓ ms. C : ΑΔΓ mss. DEGH, ag de ms. ζ || 16
 ΖΒ mss. Cζ : ΖΕ mss. DEGH || ΝΟ Basil. : on ms. ζ, ΝΘ
 mss. CDEGH.

entre MN et NO et la quatrième proportionnelle TN (sc. de MN, NO, NΞ); (sc. prenons un point P tel) que le rapport de ZΘ à IP soit égal au rapport de TM à TN, la place du point P n'ayant aucune importance, et ce point pouvant tomber soit entre Z et H, soit entre H et B. Comme ZB est le diamètre du segment d'une parabole, BZ est ou bien l'axe du segment ou bien une parallèle du diamètre, et AZ et ΔH lui sont menées d'une manière ordonnée¹, puisque ces droites sont parallèles à la tangente à la parabole au point B. Dans ces conditions, le carré sur AZ est au carré sur ΔH comme² ZB est à BH, c'est-à-dire comme MN est à NO. Mais MN est à NO comme³ le carré sur MN est au carré sur NΞ; il s'ensuit que le carré sur AZ est au carré sur ΔH comme le carré sur MN est au carré sur NΞ, d'où il ressort que les segments eux-mêmes sont dans le même rapport⁴. Par conséquent le cube sur AZ est au cube sur ΔH comme le cube sur MN est au cube sur NΞ. Mais le rapport du cube sur AZ au cube sur ΔH est égal⁵ au rapport du segment (sc. de parabole) ABΓ au segment ΔBE, et le rapport du cube sur MN au cube sur NΞ est égal⁶ au rapport de MN à NT, de façon que, par décomposition⁷, le tronc AΔEΓ est au segment (sc. de parabole) ΔBE comme⁸ MT est à NT, c'est-à-dire comme trois cinquièmes de HZ sont à IP. Comme, d'autre part, le rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur AZ et

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, déf. 4.

2. Cf. *Quadr. parab.* 3; Apollonius, *Con.* I, 20.

3. Cf. Eucl. V, déf. 9.

4. C'est-à-dire que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi}$.

5. Cf. *Quadr. parab.*, prop. 24.

6. On a en effet $\frac{MN^2}{N\Xi^2} = \frac{N\Xi}{TN}$ et $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{MN}{N\Xi}$; en multipliant ces deux égalités, on obtient $\frac{MN^3}{N\Xi^3} = \frac{MN}{NT}$.

7. Cf. Eucl. V, 17.

8. Puisque, par hypothèse, $\frac{MT}{NT} = \frac{Z\Theta}{IP}$, et $Z\Theta = \frac{3}{5} HZ$.

- λελάφθω τὰν μὲν MNO μέσα ἀνάλογον ἃ ΝΞ, τετάρτα δὲ ἀνάλογον ἃ ΤΝ, καὶ ὡς ἃ ΤΜ ποτὶ ΤΝ, οὕτως ἃ ΖΘ ποτὶ τινὰ ἀπὸ τοῦ Ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμείον · οὐδὲν γὰρ διαφέρει εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν Ζ, Η εἴτε καὶ
- 5 μεταξὺ τῶν Η, Β · τὰν ΙΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τμήματος ἃ ΖΒ, ἃ ΒΖ ἦτοι ἀρχικά ἐστὶ τῆς τομῆς ἢ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, αἱ δὲ ΑΖ, ΔΗ εἰς αὐτὰν τεταγμένως ἐντὶ καταγμέναι, ἐπειδὴ παράλληλοί ἐντι τῇ ἐπὶ τοῦ Β τῆς τομῆς ἐφαπτομένα.
- 10 Εἰ δε τοῦτο, ἔστιν ὡς ἃ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἃ ΖΒ ποτὶ ΒΗ μάκει, τουτέστιν ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΟ. Ὡς δὲ ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει · καὶ ὡς ἄρα ἃ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει · ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Καὶ ὡς ἄρα
- 15 ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον. Ἄλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως τὸ ΑΒΓ τμήμα ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμήμα, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον, οὕτως ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΤ · ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν
- 20 ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμήμα, οὕτως ἃ ΜΤ ποτὶ ΝΤ, τουτέστι τὰ $\bar{\gamma}$ ε' τῆς ΗΖ ποτὶ ΙΡ. Καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν

1 MNO ms. ζ : MNΘ mss. CDEGH || ΝΞ ms. C : ΜΞ mss. DEGHζ || 3 ἂν Basil. : ἐὰν codd. || ἕτερον Cζ : στερεὸν DEGH || 4 καὶ CDEGH : om. ζ || 4-5 Ζ, Η εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν DEGHζ : om. C || 5 κώνου DEGHζ : κωνίου C || 6 ἃ ΖΒ, ἃ ΒΖ mss. DEGHζ : αζ βη βζ ms. C || 7 ἀρχικά Heiberg : ἀρχική CEGH ἀρχική Dζ || 8 ἐντὶ Heiberg : εἰς DEGH εἰσὶν C || καταγμένα DEGHζ : κατηγμένη C || 9 ἐντι Heiberg : εἰσιν DEGH εἰσι C om. ζ || ἐπὶ Heiberg : ἀπὸ codd. || ἐφαπτομένα GH : ἐφαπτομένη C ἐφαπτόμεναι DEζ || 11 MN mss. DEGHζ : ΜΑ ms. C || 11-12 ποτὶ ΝΟ. Ὡς δὲ ἃ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἃ ΜΝ mss. Cζ : om. DEGH || 20 τόμος C : τομεὺς DEGH || ΔΒΕ Basil. : ΔΒ codd. || 21 $\bar{\gamma}$ ε' Heiberg : $\bar{\gamma}\epsilon$ CDEGH, τὰ Γ ms. ζ || ΙΡ Torellius : ΝΤ codd. || ἐπεὶ DEGHζ : ἐπὶ C.

pour hauteur la somme de deux ΔH et de AZ , au cube sur AZ est égal¹ au rapport de la somme de deux ΔH et de AZ à ZA , et par conséquent aussi au rapport de la somme de deux $N\Xi$ et de NM à NM , que le rapport du cube sur AZ au cube sur ΔH est égal au rapport de MN à NT , et que, enfin, le rapport du cube sur ΔH à la figure solide ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur la somme de deux AZ et de ΔH est égal² au rapport de ΔH à la somme de deux AZ et de ΔH , et par conséquent aussi égal au rapport de TN à la somme de deux ON et de TN , nous avons quatre grandeurs, à savoir la figure solide ayant pour base le carré sur AZ et pour hauteur la somme de deux ΔH et de AZ , le cube sur AZ , le cube sur ΔH , et la figure solide ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur la somme de deux AZ et de ΔH , et ces quatre grandeurs sont proportionnelles à quatre (sc. autres) grandeurs prises deux à deux, qui sont le segment composé du double de $N\Xi$ et de NM , en second lieu le segment MN , troisièmement le segment NT et, enfin, le segment composé du double de NO et de NT ; par raison d'identité³, donc, le rapport de la figure solide, ayant pour base le carré sur AZ et pour hauteur le segment composé du double de ΔH et de AZ , à la figure solide, ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur le segment

1. Parce que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi}$.

2. Parce que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi} = \frac{NO}{TN}$; cf. Eucl. V, 16.

3. Cf. Eucl. V, 22.

- συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, ποτὶ τὸν ἀπὸ ΑΖ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς ΔΗ μετὰ τῆς ΑΖ ποτὶ ΖΑ, ὥστε καὶ ὃν ἡ διπλασία τῆς ΝΞ μετὰ τῆς ΝΜ ποτὶ ΝΜ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος
- 5 ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ἡ ΜΝ ποτὶ ΝΤ, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ μετὰ τῆς ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΗ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ,
- 10 ὥστε καὶ ἡ ΤΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΟΝ καὶ τῆς ΤΝ, γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος καὶ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος καὶ τὸ
- 15 στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σύνδυο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένα ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΝΞ καὶ τῆς ΝΜ καὶ ἐτέρῳ μεγέθει τῇ ΜΝ καὶ ἄλλῳ ἐξῆς τῇ ΝΤ καὶ τελευ-
- 20 ταῖον τῇ συγκειμένα ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΝΟ καὶ τῆς ΝΤ · δι' ἴσου ἄρα γενήσεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν

2 ὃν add. Torellius || 5 ΔΗ mss. C \mathcal{Z} : ΔΝ mss. DEGH || δὲ ὁ DEGH \mathcal{Z} : τε C || 8 διπλασίας τῆς \mathcal{Z} : β̄ τῆς C τῆς ΔΗ om. EG || 9 διπλασίας τῆς Heiberg : β̄ τῆς C τῆς ΔΗ om. EG \mathcal{Z} || 10-11 διπλασίας τῆς CDEGH : om. \mathcal{Z} || 13 διπλασίας C : διπλᾶς DEGH || 14 καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ ms. \mathcal{Z} : om. CDEGH || 16 διπλασίας C \mathcal{Z} : διπλασίας καὶ DEGH || 19 ἐτέρῳ μεγέθει \mathcal{Z} : ἐτέρου μεγέθους C τοῦ ἐτέρου μεγέθους DEGH || τῇ C : τῆς DEGH || ἄλλῳ Heiberg : ἄλλο codd. || τῇ Heiberg : ἡ codd. || ΝΤ ms. \mathcal{Z} : ΝΤ mss. CDEGH || 20 τῇ συγκειμένα Torellius : ἡ συγκειμένη codd. || διπλασίας \mathcal{Z} : β'Η mss. DG, BH mss. CEH || 22 τετράγωνον DEGH \mathcal{Z} : τετράγωνος C.

composé du double de AZ et de ΔH , est égal au rapport du segment de droite composé du double de $N\Xi$ et de MN au segment composé du double de NO et de NT . Mais le rapport entre les deux figures solides indiquées est égal au rapport de ΘI à IK ; il s'ensuit que le rapport entre les deux segments composés est lui aussi égal au rapport de ΘI à IK . Par composition¹, donc, et les antécédents étant multipliés par cinq, le rapport de ZH à IK est égal² au rapport du segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de $N\Xi$ et NO , au segment composé du double de ON et de NT . De plus, le rapport de ZH à ZK est égal, puisque ZK est égal³ aux deux cinquièmes de ZH , au rapport du segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO , au segment composé de la double somme de MN et NT et de la quadruple somme de ΞN et NO ; le rapport de ZH à ZI sera donc égal au rapport du segment composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO au segment composé du double de MN , du quadruple de $N\Xi$, du sextuple de ON et du triple de NT . Or du moment que les quatre segments MN , $N\Xi$, ON et NT sont en proportion continue, que NT est à TM comme le segment pris PI est aux trois cinquièmes de ZH . c'est-à-dire⁴ de MO , et que, enfin, le rapport du segment, composé du double de NM , du quadruple de $N\Xi$, du sextuple de NO et du triple de NT , au segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO , est égal au rapport de

1. Cf. Eucl. V, 18.

2. Puisque $ZH = 5\Theta K$.

3. De plus : $\frac{5(MN + NT) + 10(N\Xi + NO)}{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)} = \frac{5}{2}$; cf. Eucl.

VI, 16.

4. Puisque $MO = MN - NO = ZB - HB = ZH$.

συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς
 ΔΗ, οὕτως ἃ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ
 καὶ τᾶς ΜΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας
 τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ. Ἄλλ' ὥς τὸ εἰρημένον στερεόν ποτὶ
 5 τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἃ ΘΙ ποτὶ ΙΚ · καὶ ὥς ἄρα
 ἃ ΘΙ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἃ συγκειμένα ποτὶ τὰν συγκειμέναν ·
 Ὡστε καὶ συνθέντι καὶ τῶν ἀγουμενῶν τὰ πενταπλάσια ·
 ἔστιν ἄρα ὥς ἃ ΖΗ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἃ πενταπλασία συναμ-
 φοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς
 10 ΝΞ, ΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΟΝ καὶ τὰν ΝΤ. Καὶ ὥς
 ἃ ΖΗ ποτὶ ΖΚ ἐοῦσαν αὐτᾶς δύο πέμπτα, οὕτως ἃ πεντα-
 πλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία
 συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου
 τᾶς ΜΝΤ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ·
 15 ἐσσεῖται οὖν ὥς ἃ ΖΗ ποτὶ ΖΙ, οὕτως ἃ πενταπλασία
 συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου
 τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς
 ΜΝ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΟΝ
 καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἐξῆς
 20 ἀνάλογον αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ, καὶ ἔστιν, ὥς μὲν ἃ ΝΤ ποτὶ
 ΤΜ, οὕτως λελαμμένα τις ἃ ΡΙ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς
 ΖΗ, τουτέστι τᾶς ΜΟ, ὥς δὲ ἃ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς
 διπλασίας τᾶς ΝΜ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλα-
 σίας τᾶς ΝΟ καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ ποτὶ τὰν συγκειμέναν
 25 ἔκ τε τᾶς πενταπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ
 δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ, οὕτως ἑτέρα τις

1-2 τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἃ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς
 διπλασίας C : om. DEGH ζ || 5-6 καὶ ὥς ἄρα ἃ ΘΙ ποτὶ ΙΚ
 mss. DEGH ζ : om. C || 7 πενταπλάσια Heiberg : $\bar{\epsilon}$ CDEGH
 sequentia ζ || 8 πενταπλασία ζ : $\bar{\epsilon}$ C om. DEGH || 10 τὰν alt.
 add. Basil. || 11 ἃ pr. om. ζ || 13 ΞΝΟ Torellius : ΝΞΟ codd. ||
 15 ἃ pr. Heiberg : ἡ C om. DEGH ζ || 18 τᾶς pr. Heiberg : τῆς
 CDEGH om. ζ || 20 ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ Heiberg : ΜΝΞ ΟΝΤ
 codd. || 24 ΝΟ ms. ζ : ΝΘ mss. CDEGH.

l'autre segment pris IZ à ZH, c'est-à-dire à MO, le segment PZ sera, en vertu de ce qui a été démontré plus haut¹, égal aux deux cinquièmes de MN, c'est-à-dire de ZB; le centre de gravité du segment ABΓ est donc² le point P. Soit X le centre de gravité du segment ΔBE. Le centre de gravité du tronc AΔEΓ sera donc situé sur le prolongement de XP, à l'extrémité d'un segment dont le rapport à XP est égal au rapport du tronc au reste du segment de parabole³. Or c'est le point I (sc. qui répond à ces conditions). Du moment, en effet, que BP est égal aux trois cinquièmes de ZB, et BX égal aux trois cinquièmes de HB, XP (sc. qui est la différence entre BP et BX) est égal aux trois cinquièmes du segment de reste HZ (sc. entre ZB et HB). Dès lors, comme le tronc AΔEΓ est au segment ΔBE comme MT est à TN, et que MT est à TN comme trois cinquièmes de HZ, c'est-à-dire comme XP, est à PI, le rapport du tronc AΔEΓ au segment ΔBE est lui aussi égal au rapport de XP à PI. De plus, le centre de gravité du segment entier est le point P, et celui du segment ΔBE est le point X; il est donc évident que le centre de gravité du tronc AΔEΓ est le point I⁴.

1. Cf. prop. 9.

2. Cf. prop. 8.

3. Cf. prop. I, 8.

4. Cf. prop. I, 6 et 7.

- λελαμμένα ἃ ΙΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ποτὶ τὰν ΜΟ,
 ἐσσεῖται διὰ τὰ πρότερον ἃ ΡΖ δύο πέμπτα τᾶς ΜΝ,
 τουτέστι τᾶς ΖΒ · ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ
 τμήματος τὸ Ρ σαμεῖον. Ἔστω δὴ καὶ τοῦ ΔΒΕ τμήματος
 5 κέντρον βάρεος τὸ Χ σαμεῖον. Τοῦ ἄρα ΑΔΕΓ τόμου
 ἐσσεῖται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ἐπ' εὐθείας τῇ
 ΧΡ τὸν αὐτὸν ποτὶ αὐτὰν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει ὁ τόμος
 ποτὶ τὸ λοιπὸν τμήμα. Ἔστιν δὲ τὸ Ι σαμεῖον. Ἐπεὶ
 γὰρ τᾶς μὲν ΖΒ τρία πέμπτα ἐστὶν ἃ ΒΡ, τᾶς δὲ ΗΒ τρία
 10 πέμπτα ἐστὶν ἃ ΒΧ, καὶ λοιπᾶς ἄρα τᾶς ΗΖ τρία πέμπτα
 ἐστὶν ἃ ΧΡ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς μὲν ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ
 ΔΒΕ τμήμα, οὕτως ἃ ΜΤ ποτὶ ΤΝ, ὡς δὲ ἃ ΜΤ ποτὶ τὰν
 ΤΝ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΗΖ, ἅτις ἐστὶν ἃ ΧΡ,
 ποτὶ ΡΙ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ
 15 τμήμα, οὕτως ἃ ΧΡ ποτὶ ΡΙ. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος
 κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΕ κέντρον
 βάρεος τὸ Χ · φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου τὸ
 κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ι σαμεῖον.

5 ἄρα add. Torellius || ■ τᾶ Heiberg : τῆς codd. || 7 τόμος
 Heiberg : τομεὺς codd. || 11 τόμος Heiberg : τομεὺς codd. ||
 13 ΗΖ mss. Cζ : ΝΖ mss. DEGH || 14 τόμος Heiberg : τομεὺς
 codd. || 15-16 ΡΙ. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον ζ :
 om. CDEGH || 17 ΑΔΕΓ ms. ζ : ΑΒΕΓ mss. CDEGH || τόμου
 Heiberg : τομέως codd.

NOTICE

Dans ce traité, Archimède se propose de relever le défi d'une vieille locution proverbiale, formulée par Pindare en ces termes : « le sable échappe au nombre »¹.

Si l'opinion populaire des Grecs désespérait de pouvoir exprimer, par des nombres, des multitudes dépassant une certaine limite, cela provenait de ce que leur numération courante s'arrêtait à un chiffre, la myriade, qui pouvait suffire, grâce à des multiplications, simples ou répétées, pour évaluer les effectifs, en hommes et en chevaux, d'une armée, même immense aux yeux des Grecs, comme celles des Perses lors des guerres médiques, mais qui s'avérait rapidement impuissant pour exprimer des quantités comme celle des grains contenus dans un amas de sable. La langue grecque ne diffère d'ailleurs pas essentiellement, sous ce rapport, de nos langues modernes. Nous parons aujourd'hui à l'insuffisance du vocabulaire arithmétique courant, y compris les néologismes par lesquels on a essayé d'élargir le pouvoir d'expression du nombre, en faisant appel à l'algorithme des exposants, 10^n , 10^{n+1} , etc.

Pour s'affranchir de son côté des limites imposées à la numération par le langage courant, Archimède invente un système de notations comparable à nos systèmes de puissances de 10, où il distingue les « premiers nombres », de 1 à mille myriades ou 10^8 , les

1. Ψάμμος ἀριθμὸν περιπέφηνεν, II^e *Olymp.*, fin ; cf. Homère : οὐδ' εἰ μοι τόσα δόλη, ὅσα ψάμαθός τε κόνις τε, *Il.* IX, 385.

« nombres seconds », dans lesquels 10^8 constitue la nouvelle unité et qui vont de 10^8 , à travers $2 \cdot 10^8$, $3 \cdot 10^8$, etc., à $10^8 \cdot 10^8$ ou 10^{16} , les « nombres troisièmes », de 10^{16} à $10^8 \cdot 10^{16} = 10^{24}$, et ainsi de suite jusqu'aux nombres (10^8) ïèmes, dont le dernier est $A = 10^{8 \cdot 10^8}$.

Les nombres indiqués jusqu'ici suffiraient largement pour l'évaluation précise qu'Archimède propose au roi Gélon. Mais pour démontrer jusqu'au bout le pouvoir expressif de son système arithmétique il imagine des entités encore plus grandes. Envisageant les nombres de 1 à $10^{8 \cdot 10^8} = A$ comme formant une première période, il définit la deuxième période comme étant composée des nombres de A à A^2 et comme comprenant une suite de premiers nombres allant de A à une myriade de myriades de A , c'est-à-dire de A à $10^8 A$, suivie d'une suite de nombres seconds allant de $10^8 A$ à $10^{16} A$, et ainsi de suite jusqu'à une suite de nombres (10^8) ïèmes allant de $10^{8(10^8-1)} A$ à $10^{8 \cdot 10^8} A = A^2$, la troisième période comme composée des nombres de A^2 à A^3 , et ainsi de suite jusqu'à la (10^8) ïème période comprenant les nombres de A^{10^8-1} à A^{10^8} , ce dernier nombre étant égal à $10^{8 \cdot 10^{16}}$.

Mais l'intérêt de l'*Arénaire* ne s'épuise pas dans cette imposante création de notations arithmétiques nouvelles. S'étant fait fort d'exprimer le nombre des grains de sable que pourrait contenir le cosmos, Archimède commence par définir la réalité qu'on appelle cosmos et par indiquer les dimensions qu'il lui prête. Pour prévenir l'objection qu'il se serait facilité la tâche en choisissant un cadre cosmique trop exigü comme réceptacle fictif de son sable, il force les dimensions du monde telles qu'elles étaient admises par ses devanciers et ses contemporains, ce qui est pour lui l'occasion de quelques remarques et allusions d'un grand intérêt pour l'histoire des sciences.

En ce qui concerne d'abord la définition du cosmos, selon « la plupart des astronomes », comme étant la sphère ayant pour centre le centre de la terre et pour rayon la droite joignant le centre de la terre à celui

du soleil¹, nous ignorons quels sont les astronomes et les systèmes visés par Archimède. Ce qui est certain d'après cette remarque, c'est que les définitions anciennes du cosmos, telles qu'on les rencontre encore chez Platon² et chez Aristote³, avaient été abandonnées vers 250 avant J.-C. par beaucoup d'astronomes. Chez Platon et chez Aristote, la limite du cosmos s'était confondue avec celle de l'univers, c'est-à-dire avec la sphère des fixes, au-delà de laquelle il n'y avait plus rien, même pas le vide, puisque, d'après Parménide, suivi en ce point par les deux penseurs, le non-être, n'étant pas pensable, ne pouvait exister. La nouvelle définition du monde est fondée sur une distinction qui dispensait désormais les astronomes de toute spéculation sur les limites du réel et de l'option entre Parménide et Démocrite, à savoir sur la dissociation de la représentation de l'univers, τὸ πᾶν, et celle du monde, ὁ κόσμος.

Mais le réceptacle fictif du sable dont Archimède se propose de calculer la quantité n'est pas le cosmos ainsi défini, ni même celui qui lui correspondrait dans le système héliocentrique récemment découvert, mais bien l'univers, le πᾶν des anciens, dont il évalue les dimensions en se fondant sur les indications d'Aristarque de Samos. La page où Archimède discute les données de ce système est le témoignage le plus ancien que nous ayons de la réforme héliocentrique du « Copernic de l'antiquité ». Le seul ouvrage conservé d'Aristarque, qui fut à peu près contemporain d'Archimède, le traité *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune*⁴, ne contient aucune allusion à l'initiative hardie du savant astronome. Parmi les autres astronomes, anciens ou contemporains, ayant publié des travaux sur les dimensions et les distances des corps célestes, Archimède

1. Cf. le commencement du traité.

2. En particulier dans le *Timée*.

3. Dans le *De caelo* et *passim*.

4. Édition critique, avec traduction anglaise, par Th. L. Heath, Oxford 1913.

cite Eudoxe de Cnide, le célèbre inventeur des « sphères homocentriques » destinées à « sauver les apparences célestes », qui avait déclaré le diamètre du soleil neuf fois plus grand que celui de la lune, et Phidias, père d'Archimède, qui lui avait prêté une longueur de douze diamètres de la lune, et il fait allusion probablement à Dicéarque de Messine, astronome de la seconde moitié du iv^e siècle, par sa remarque que certains ont essayé de démontrer que le périmètre de la terre est de trente myriades de stades.

Archimède lui-même apparaît dans ce chapitre du traité comme un astronome de marque¹, en particulier par la précision avec laquelle il détermine le diamètre apparent du soleil. La description minutieuse du dispositif, construit par lui en vue de ses mesures, et de ses opérations de visée est une des rares pages de technologie grecque qui nous font assister à une expérience physique.

1. D'après la tradition, Archimède est l'auteur d'un traité sur la construction de sphères célestes, *Περὶ σφαιροποιίας*, cf. Carpus, dans Pappus, *Coll.*, VIII, 3, et Proclus, *In Eucl.*, éd. Friedlein, p. 41. Cicéron nous a laissé des descriptions du planétarium construit par Archimède, cf. *De re publ.*, I, 21, 22 ; *Tusc.*, I, 63 ; *De natura deorum*, II, 88.

L'ARÉNAIRE

I. Certains estiment, roi Gélon¹, que le nombre des grains de sable est infiniment grand², et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité des grains de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre remplie de la manière que nous

1. Gélon, fils de Hiéron, roi de Syracuse, partageait le pouvoir avec son père et portait le titre de roi.

2. Cf. *Notice*, début.

ΨΑΜΜΙΤΗΣ

1. Οἷονται τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν
ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ
Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος,
5 ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ
τὰν ἀοίκητον. Ἐντί τινες δέ, οἳ αὐτὸν ἄπειρον μὲν εἶμεν
οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδὲνα μέντοι ταλικοῦτον κατωνο-
μασμένον ὑπάρχειν ἀριθμὸν, ὅστις ὑπερβάλλει τὸ πλήθος
αὐτοῦ. Οἱ δὲ οὕτως δοξάζοντες δῆλον ὥς, εἰ νοήσαιεν
10 ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὸ μέγεθος,
ἀλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν
τε πελάγεων πάντων καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς εἰς
ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὁρέων, πολλαπλασίως
μὴ γινώσκονται μηδὲνα κα ρηθῆμεν ἀριθμὸν ὑπερβάλλοντα
15 τὸ πλήθος αὐτοῦ. Ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαί τοι δεικνύειν
δι' ἀποδείξιων γεωμετρικᾶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι
τῶν ὑφ' ἀμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων
ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύσιππον γεγραμμένοις ὑπερβάλλοντί τινες
οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος

2 ἀριθμὸν D : om. EGH || 3 τοῦ Basil. : τὸν DEGH || 6 ἐντί Riualtus : ἐν DEGH || οἳ Riualtus : om. DEGH || μὲν εἶμεν Torellius : ἡνέμεν DEGH || 7 ὑπολαμβάνοντι EG : ὑπολαμβάνωντι DH || 8 ἀριθμὸν add. Heiberg || 10 τὸ μέγεθος Heiberg : τὰ μὲν codd. || 11 ἀλίκος Wallis : ἀλίκαν codd. || τᾶς Wallis : πᾶς codd. || γᾶς Wallis : γὰρ codd. || 12 εἰς add. Heiberg || 13 ὁρέων EG : ὠρέων DH || 14 μὴ γινώσκονται Heiberg : μήγουσιν τε codd. || μηδὲνα κα ρηθῆμεν ἀριθμὸν Heiberg : μηδὲνα κάρη ἔμμεναι codd. || 15 τοι Hultsch, Gertz : του codd. || 17 ἐκδεδομένων Wallis : ἐνδεδομένον DH ἐνδεδομένων EG.

avons indiquée, mais même (sc. le nombre des grains de sable) ayant un volume égal à celui du monde. Or tu te souviens que par le terme monde la plupart des astronomes désignent la sphère ayant pour centre le centre de la terre et pour rayon la droite comprise entre le centre du soleil et le centre de la terre, car tu auras appris cela dans les démonstrations qu'écrivent les astronomes. Aristarque de Samos, cependant, ■ publié quelques hypothèses desquelles se déduisent pour le monde des dimensions beaucoup plus grandes que celles que nous venons de dire. Il suppose¹ en effet que les étoiles fixes et le soleil restent immobiles, que la terre tourne autour du soleil sur une circonférence de cercle, le soleil occupant le centre de cette trajectoire, et que la sphère des fixes, qui s'étend autour du même centre que le soleil, a une grandeur telle que le rapport du cercle, sur lequel il suppose que la terre tourne, à la distance des étoiles fixes est comparable au rapport du centre de la sphère à sa surface. Ceci, certes, est impossible de toute évidence ; car du moment que le centre de la sphère n'a aucune grandeur², il faut admettre qu'il n'a aucun rapport, non plus, à la surface de la sphère. Mais on peut croire que le raisonnement d'Aristarque est le suivant : puisque nous admettons que la terre est en quelque sorte le centre du monde, le rapport de la terre à ce que nous appelons communément le monde est égal au rapport de la sphère, contenant le cercle sur lequel il suppose que la terre tourne,

1. Dans un ouvrage perdu, *Les Hypothèses*, de 260 avant J.-C.

2. Cf. Eucl. I, déf. 1.

- ἴσον τῇ γῇ πεπληρωμένα, καθάπερ εἵπαμες, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. Κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ὥς ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἃ δὲ
- 5 ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τῇ εὐθείᾳ τῇ μεταξύ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς· ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων δείξεσι διακουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθέσιων τινων ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει
- 10 τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. Ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρον καὶ τὸν ἄλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἄλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὥς ἐστὶν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν
- 15 περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει τηλικαύταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἷαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. Τοῦτό γ' εὐδὴλον ὥς ἀδύνατόν
- 20 ἐστὶν· ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. Ἐκδεκτέον δὲ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε· ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομες ὥσπερ εἶμεν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἃ γὰ ποτὶ τὸν
- 25 ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστὶν ὁ κύκλος, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον

2 μέγεθος G : μεγέθους DEH || 5 ἐκ add. Wallis || ἴσα Wallis : lac. codd. || τῇ εὐθείᾳ Riualtus : αἰ εὐθεΐα codd. || 7 δείξεσι διάκουσας Heiberg : διάκρουσας codd. || 8 δὲ add. Heiberg || 9 γραφάς Bergk et Heiberg : γράψας codd. || 16 ὥστε Basil. : ἔστω codd. || ὃν Basil. : οὐ codd. || 20 τὸ G : τὰ DEH || 22 αὐτό G : αὐτόν DEH || 23-24 ὥσπερ εἶμεν Heiberg : ὥς περὶ μὲν codd. || 26 ὃν Basil. : οὐ codd.

à la sphère des fixes¹ ; il adapte en effet ses démonstrations des apparences (sc. célestes) à une hypothèse de ce genre, et il semble surtout supposer la grandeur de la sphère, sur laquelle il fait tourner la terre, égale à la réalité que nous appelons communément le monde. Je dis dès lors que, même s'il y avait une sphère composée de sable ayant la grandeur que les hypothèses d'Aristarque prêtent à la sphère des fixes, on pourrait démontrer que parmi les nombres susceptibles d'expression, dont il a été question au début, certains dépassent par leur grandeur le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la sphère indiquée, et cela avec les hypothèses que voici.

1. Nous admettrons d'abord que le périmètre de la terre a une longueur de trois cents myriades de stades, et pas davantage, bien que certains² aient essayé de démontrer, comme toi aussi tu as pu l'apprendre, que cette longueur est de trente myriades de stades. Mais moi, dépassant ce nombre et posant les dimensions de la terre dix fois plus grandes que celles qu'avaient évaluées mes prédécesseurs, je suppose que son périmètre est de trois cents myriades de stades, et pas davantage³.

2. (Sc. Nous admettrons) en second lieu que le diamètre de la terre est supérieur au diamètre de la lune et que le diamètre du soleil est supérieur au diamètre de la terre, me rencontrant dans cette hypothèse avec la plupart des astronomes antérieurs.

3. Troisième hypothèse : le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, et pas plus,

1. Cf. Aristarque, *Des grandeurs et des distances*, etc., 2 ; Ptolémée, *Almageste* I, 6.

2. Parmi lesquels peut-être Dicéarque.

3. Des différentes évaluations du périmètre de la terre la plus célèbre est celle d'Ératosthène, fondée sur des mesures géodésiques opérées par lui en Égypte.

- σφαῖραν · τὰς γὰρ ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκειμένῳ ἐναρμόζει, καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τῆς σφαίρας, ἐν ᾧ ποιεῖται τὰν γὰν κινουμένην, ἴσον ὑποτίθεσθαι τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. Φαμὲς δὴ,
- 5 καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἀλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν εἶμεν, καὶ οὕτως τινὰς δειχθήσιν τῶν ἐν ἀρχᾷ ἀριθμῶν τῶν κατονομαζίαν ἔχόντων ὑπερβάλλον-
 10 τας τῷ πλήθει τὸν ἀριθμὸν τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ εἰρημένῃ σφαίρᾳ, ὑποκειμένων τῶνδε · πρῶτον μὲν τὰν περίμετρον τῆς γᾶς εἶμεν ὡς 7 μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω, καίπερ τινῶν πεπειραμένων ἀπο-
 15 δεικνύειν, καθὼς καὶ τὸ παρακολουθεῖς, ἐοῦσαν αὐτὰν ὡς 17 μυριάδων σταδίων. Ἐγὼ δ' ὑπερβαλλόμενος καὶ θεὸς τὸ μέγεθος τῆς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων
 20 δεδοξασμένου τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν ὡς 7 μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω · μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τῆς γᾶς μείζονα εἶμεν τῆς διαμέτρου τῆς σελήνας, καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἀλίου μείζονα εἶμεν
 23 τῆς διαμέτρου τῆς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων · μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἀλίου τῆς διαμέτρου τῆς σελήνας ὡς τριακονταπλάσιαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα, καίπερ τῶν

1 γὰρ add. Torellius || 2 ὑποκειμένῳ Gertz : ὑποκειμένου DEH ὑποκειμένων G || 4 ὑποτίθεσθαι Riualtus : ὑποτίθεται codd. || 7 δειχθήσιν Ahrens : δειχθεις codd. || 8 ἀρχᾷ ἀριθμῶν Heiberg et Hultsch : ἀρχαῖς codd. || κατονομαζίαν Wallis et Heiberg : κατονομαζιών codd. || 9 μέγεθος G : μεγέθους DEH || 11 μυριάδων GH : μοιριάδων DE || 12 μὴ add. Wallis || μείζω Wallis : μείζων codd. || καίπερ Wallis : καὶ περὶ codd. || τινῶν Heiberg : τῶν codd. || 13 τὸ Riualtus : τοι codd. || 14 μυριάδων GH : μοιριάδων DE || καὶ θεὸς Heiberg : καθεὶς codd. || 15 δεκαπλάσιον Wallis : δεκαπλασίων codd. || 16 δεδοξασμένου Basil. : δεδοξασμένων codd. || 17 μυριάδων Heiberg : μὲ codd. || μείζω E : μείζων DGH || 18 εἶμεν G : εκειμεν codd. || 23 καίπερ Wallis : καὶ περὶ codd.

bien que parmi les astronomes antérieurs Eudoxe¹ ait essayé de le présenter comme neuf fois plus grand, et mon père Phidias comme douze fois plus grand, alors qu'Aristarque² s'est efforcé de démontrer que le diamètre du soleil est compris entre une longueur de dix-huit diamètres de la lune et une longueur de vingt diamètres de la lune ; mais moi, dépassant aussi ce nombre, je suppose, pour que ma proposition soit démontrée sans contestation, que le diamètre du soleil est égal à trente diamètres de la lune, et pas plus.

4. Nous admettons, enfin, que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde. Je fais cette hypothèse, alors qu'Aristarque avait trouvé que le (sc. diamètre du) soleil apparaît comme la sept cent vingtième partie du cercle du zodiaque. En examinant la question, j'ai de mon côté essayé, de la manière qui va suivre, de prendre, à l'aide d'instruments, l'angle qui embrasse le soleil, en ayant son sommet dans l'œil. Certes, la mesure exacte (sc. de cet angle) n'est pas chose aisée, parce que ni la vue, ni les mains, ni les instruments nécessaires pour prendre cet angle ne sont assez sûrs pour nous le faire trouver avec précision ; mais il ne me paraît pas indiqué pour le moment de m'arrêter longtemps à cette question, surtout parce que des observations de ce genre ont été souvent signalées ; il me suffit pour la démonstration de ma proposition de prendre un angle qui ne soit pas supérieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil, et de prendre ensuite un autre

1. Eudoxe de Cnide, géomètre et astronome, disciple de Platon ; il chercha à « sauver les apparences » des mouvements des planètes par sa théorie des sphères homocentriques.

2. Dans son livre — le seul qui ait été conservé — *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune*.

- προτέρων ἀστρολόγων Εὐδόξου μὲν ὡς ἐννεαπλασίονα ἀποφαινομένου, Φειδία δὲ τοῦ ἀμοῦ πατρὸς ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν, Ἀριστάρχου δὲ πεπειραμένου δεικνύειν ὅτι ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας
- 5 μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἴκοσπλασίων · ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ προκείμενον ἀναμφιλόγως ἢ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα · ποτὶ δὲ τούτοις
- 10 τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι Ἀριστάρχου μὲν εὐρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον ὡς τὸ εἴκοστόν καὶ ἐπτακοσιοστόν, αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος
- 15 τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει. Τὸ μὲν οὖν ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν δεῖ λαβεῖν, ἀξιόπιστα εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι ·
- 20 περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὐκαιρον μακύνειν ἄλλως τε καὶ πλεονάκεις τοιούτων ἐμπεφανισμένων · ἀποχρὴ δέ μοι ἐς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅτις ἐστὶ μὴ μείζων τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει, καὶ πάλιν

1 ἐννεαπλασίονα Wallis : ἐννεαπλάσιον codd. || 2 ἀμοῦ Blass, Kieler, Heiberg : ἀκου DEGH || 4 τοῦ add. Heiberg || 7 προκείμενον Gertz : ὑποκείμενον codd. || ἀναμφιλόγως Heiberg : ἀναμφίλογον codd. || 8 τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου add. Wallis || 9 μείζονα G : μεῖζον D μεῖζων H μεῖζω E || 13 εὐρηκότος Heiberg : εἰρηκότος codd. || τὸν G : τῶν DEH || 16 εἰς ἃν Wallis : ὡς ἃν codd. || ἔχουσιν EGH : ἔχουσα D || 17 οὖν ἀκριβὲς Heiberg : ὅμοιον ἀκριβεῖ codd. || 19 δεῖ λαβεῖν Heiberg : διαλαβεῖν codd. || ἀξιόπιστα Hultsch et Heiberg : ἀξιοπίστας codd. || 23 μὴ add. Wallis || εἰς Heiberg : ἐς G αἴς DEH || 24 ἐναρμόζει G : ἐναρμόζη DEH || τῇ add. Wallis.

angle qui ne soit pas inférieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil. Une longue règle ayant donc été placée sur un socle vertical disposé en un lieu d'où le soleil à son lever¹ pouvait être vu, un petit cylindre, fait au tour, est posé verticalement sur la règle immédiatement après le lever du soleil ; ensuite, le soleil étant à l'horizon et pouvant (sc. encore) être regardé en face, la règle est orientée vers le soleil et l'œil placé à l'extrémité de la règle ; le cylindre, posé entre le soleil et l'œil, fait écran au soleil. Le cylindre est donc éloigné (sc. peu à peu) de l'œil, et dès qu'une petite partie du soleil commence à se montrer de chaque côté du cylindre, celui-ci est fixé. Si donc l'œil voyait réellement à partir d'un seul point, des tangentes étant menées au cylindre à partir de l'extrémité de la règle, où est posé l'œil, l'angle compris entre les droites menées serait inférieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil, puisque quelque chose du soleil est visible de chaque côté du cylindre ; mais comme les yeux ne voient pas à partir d'un point unique, mais à partir d'une certaine grandeur, on prend une certaine grandeur, de forme ronde, non inférieure à l'œil, et on la place à l'extrémité de la règle, à l'endroit où avait été placé l'œil ; si on mène alors des droites tangentes à la fois à cette grandeur et au cylindre, l'angle compris entre ces droites est inférieur

1. Précaution prise par les astronomes de l'antiquité pour ménager les yeux.

- ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, αἵτις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει. Τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πόδα ὀρθὸν ἐν τόπῳ κείμενον, ὅθεν ἡμελλεν ἀνατέλλων ὁ ἄλιος ὁρᾶσθαι,
- 5 καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὴν ἀνατολὴν τοῦ αἰλίου, ἔπειτ' ἐόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὀρίζοντι καὶ δυναμένου ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν εἰς τὸν ἄλιον, καὶ ὁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος · ὁ δὲ κύλινδρος
- 10 ἐν μέσῳ κείμενος τοῦ τε αἰλίου καὶ τᾶς ὀψιος ἐπεσκότει τῷ αἰλίῳ. Ἀποχωριζόμενος οὖν [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τᾶς ὀψιος, ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ αἰλίου μικρὸν ἐφ' ἐκάτερα τοῦ κυλίνδρου, κατεστάθη ὁ κύλινδρος. Εἰ μὲν οὖν συνέβαιεν τὴν ὄψιν ἀφ' ἐνὸς σαιμείου βλέπειν,
- 15 εὐθείᾳ ἀχθειςὶν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ὁ ὄψις κατεστάθη, ἐπιψαυουσὶν τοῦ κυλίνδρου ἃ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τῶν ἀχθειςὶν ἐλάσσων καὶ τῆς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει, διὰ τὸ παραβλέπεσθαι τι τοῦ αἰλίου ἐφ' ἐκάτερα τοῦ
- 20 κυλίνδρου · ἐπεὶ δ' αἱ ὀψιες οὐκ ἀφ' ἐνὸς σαιμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπὸ τινος μεγέθους, ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον οὐκ ἔλαττον ὀψιος, καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθους ἐπὶ τὸ

2 εἰς Heiberg : ἐς G ας DEH || ἐναρμόζει G : ἐναρμόζη DEH || τῇ H : τη DE τῇ G || 3 πόδα Gertz : πεδὸν codd. || 4 ἀνατέλλων D : ἀνατέλλειν EGH || 7 ἐόντος Wallis : ἰόντος codd. || δυναμένου Wallis : δυνάμενον τοῦ DEH δυναμένου αὐτοῦ G || 8-9 ὁ ὄψις Riualtus : ὁψις codd. || 11 ἀποχωριζόμενος οὖν Heiberg : ἀποχωριζόμενος DEH ἀποχωριζομένου G || τοῦ κυλίνδρου codd. : del. Heiberg || 12 ᾧ Heiberg : ᾗ codd. || μικρὸν Wallis : μικροῦ codd. || 14 οὖν Heiberg : ὁμοίως codd. || 16 ἐπιψαυουσὶν Riualtus : ἐπιψάουσιν codd. || 17 τῆς Heiberg : εἰς codd. || εἰς Heiberg : ἐς G αἰς DEH || 18 ἐναρμόζει GH : ἐναρμόζη DE || τὴν GH : τῇ D τᾶς E || ἔχουσιν Basil. : ἐχούσας codd. || 19 παραβλέπεσθαι Gertz : περιβλέπεσθαι codd. || 20 ἀφ' ἐνὸς σαιμείου Wallis : ἀφανῇ σημείον codd. || 22 ὀψιος Wallis : ὀψις DEH ἢ ὀψις G.

à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil. Et voici la manière dont on trouve la grandeur (sc. ronde) non inférieure à l'œil : on prend deux petits cylindres minces, de même épaisseur, l'un blanc, l'autre non, et on les place devant l'œil, le blanc à quelque distance, celui qui n'est pas blanc le plus près possible de l'œil, au point même de toucher la face. Dès lors, si les petits cylindres pris sont moins larges que l'œil, le cylindre voisin de l'œil est embrassé par le flux visuel, et l'œil voit le cylindre blanc ; si les cylindres sont beaucoup moins larges, le blanc est vu entièrement ; s'ils ne sont pas beaucoup moins larges, on voit des parties du blanc de part et d'autre du cylindre voisin de l'œil ; mais si on choisit ces cylindres avec une épaisseur convenable, l'un d'eux fait écran à l'autre sans cacher un espace plus grand ; il est donc certain qu'une grandeur telle que l'épaisseur des cylindres qui produisent cet effet n'est pas inférieure aux dimensions de l'œil. Quant à l'angle non inférieur à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil, il a été pris de cette manière : le cylindre étant posé sur la règle à une distance de l'œil telle qu'il fait écran à tout le soleil, si on mène de l'extrémité de la règle, où l'œil est placé, des droites tangentes

- ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἀχθεισῶν
 εὐθειᾶν ἐπιψαυουσῶν τοῦ τε μεγέθους καὶ τοῦ κυλίνδρου
 ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν ἐλάττων ἥς
 τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν
 5 ποτὶ τῇ ὀψει. Τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον τᾶς ὀψιος
 τόνδε τὸν τρόπον εὐρίσκεται ἡ δύο κυλίνδρια λαμβάνεται
 λεπτὰ ἰσοπαχέα ἀλλάλοις, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ οὖ, καὶ
 προτίθενται πρὸ τᾶς ὀψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφιστακὸς
 ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὡς ἔστιν ἐγγυτάτῳ τᾶς ὀψιος,
 10 ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. Εἰ μὲν οὖν καὶ τὰ
 λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα ἔωντι τᾶς ὀψιος, περιλαμ-
 βάνεται ὑπὸ τᾶς ὀψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον καὶ ὀρήται
 ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκόν, εἰ μὲν καὶ παρὰ πολὺ λεπτότερα
 ἔωντι, πᾶν, εἰ δὲ καὶ μὴ παρὰ πολὺ, μέρεά τινα τοῦ λευκοῦ
 15 ὀρῶνται ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐγγὺς τᾶς ὀψιος, λαφθέντων
 δὲ τῶνδε τῶν κυλινδρίων ἐπιταδείων πως τῷ πάχει ἐπισκοτεῖ
 τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἐτέρῳ καὶ οὐ πλείονι τόπῳ ἡ τὸ δὴ
 ταλικοῦτον μέγεθος, ἀλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων
 τῶν τοῦτο ποιοῦντων, μάλιστά πῶς ἔστιν οὐκ ἔλαττον
 20 τᾶς ὀψιος. Ἄ δὲ γωνία ἁ οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς
 ἃν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ
 ὀψει, οὕτως ἐλάφθη ἡ ἀποσταθέντος ἐπὶ τοῦ κανονίου
 τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὀψιος οὕτως, ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν

1-2 ἀχθεισῶν εὐθειᾶν ἐπιψαυουσῶν Wallis : ἀχθεῖσα εὐθεῖα
 ἐπιψαυούσα codd. || 4 εἰς Heiberg : ἐς G αἰς DEH || ἐναρμόζει G :
 ἐναρμόζη DEH || ἔχουσιν Nizzius : ἐχούσας codd. || 7 τὸ pr. GH :
 τὰ DE || 8 πρὸ Heiberg : πρὸ πρὸς G ποτὶ EG πρὸς D || ὄψιος
 Wallis : ὀψίας codd. || 9 ὡς G : ὅς DH ὅσον E || ὄψιος Wallis :
 ὀψίας codd. || 10 κα add. Heiberg || 11 λεπτότερα Wallis : λεπτό-
 τατα codd. || ὄψιος Wallis : ὀψίας codd. || 13 μὲν Wallis : κα
 codd. || λεπτότερα Wallis : λεπτοτέρων codd. || 14 ἔωντι Wallis :
 ἔοντι codd. || 15 τοῦ G : τᾶς DEH || 16 κυλινδρίων Wallis :
 κυλίνδρων codd. || ἐπιταδείων Wallis : ἐπειτα δι' ὧν codd. || 18
 κυλινδρίων Wallis : κυλίνδρων codd. || 20 ἁ alt. add. Heiberg || εἰς
 Heiberg : ἐς G αἰς DEH || 22 ἐπὶ Wallis : ἀπὸ codd. || 23
 ἐπισκοτεῖν Basil. : ἐπικροτεῖν codd.

au cylindre, l'angle compris entre les droites menées n'est pas inférieur à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil. Un angle droit étant ainsi mesuré par les angles pris de cette manière, l'angle (sc. dont le sommet est) placé au point (sc. extrémité de la règle) est trouvé inférieur à la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, alors que le plus petit angle¹ est trouvé supérieur à la deux centième partie de l'angle droit ; il est donc évident que l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil est lui aussi inférieur à la cent soixante-quatrième partie, et supérieur à la deux centième partie d'un angle droit. Ces mesures confirmées, on démontre que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde. Imaginons en effet un plan passant par le centre du soleil, par le centre de la terre et par l'œil, au moment où le soleil se trouve un peu au-dessus de l'horizon ; que ce plan coupe le monde suivant le cercle $AB\Gamma$, la terre suivant le cercle ΔEZ , et le soleil suivant le cercle ΣH ; soit Θ le centre de la terre, K le centre du soleil, et soit Δ l'œil ; menons de Δ les tangentes $\Delta\Lambda$, $\Delta\Xi$ au cercle ΣH , points de contact N et T , et de Θ les tangentes ΘM et ΘO , points de contact X et P ; soit A et B les points d'intersection du cercle $AB\Gamma$ et des droites ΘM et ΘO ;

1. C'est-à-dire l'angle compris entre les tangentes aux deux cylindres menées à partir de l'œil.

- κύλινδρον ὅλῳ τῷ ἀλίῳ, καὶ ἀχθείσῃν εὐθείῃν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἂ ὄψις κατεστάθῃ, ἐπιψαυουσῇν τοῦ κυλίνδρου ἂ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τῶν ἀχθείσῃν εὐθείῃν οὐκ ἐλάττων γίνεται τῆς γωνίας, εἰς ἃν ἂ ἄλιος
- 5 ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει. Ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγένετο ἂ ἐν στίγῳ διαιρεθείσας τῆς ὀρθᾶς εἰς $\overline{\rho\zeta\delta}$ ἐλάττων ἢ ἐν μέρος τούτων, ἂ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσας τῆς ὀρθᾶς εἰς $\overline{\sigma}$ μείζων ἢ ἐν μέρος τούτων · δῆλον οὖν
- 10 ὅτι καὶ ἂ γωνία, εἰς ἃν ὁ ἄλιος ἐναρμόζει τὴν κορυφὴν ἔχουσιν ποτὶ τῇ ὄψει, ἐλάττων μὲν ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τῆς ὀρθᾶς εἰς $\overline{\rho\zeta\delta}$ τούτων ἐν μέρος, μείζων δὲ ἢ διαιρεθείσας τῆς ὀρθᾶς εἰς $\overline{\sigma}$ τούτων ἐν μέρος. Πεπιστευμένων δὲ τούτων δείκνυται ἂ διάμετρος τοῦ ἀλίου μείζων ἐοῦσα τῆς τοῦ
- 15 χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Νοεῖσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τε τοῦ κέντρου τοῦ ἀλίου καὶ τοῦ κέντρου τῆς γᾶς καὶ διὰ τῆς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα ἑόντος τοῦ ἀλίου, τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβληθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν
- 20 κόσμον κατὰ τὸν ΑΒΓ κύκλον, τὴν δὲ γᾶν κατὰ τὸν ΔΕΖ, τὸν δὲ ἄλιον κατὰ τὸν ΣΗ κύκλον, κέντρον δὲ ἕστω τῆς μὲν γᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἀλίου τὸ Κ, ὄψις δὲ ἕστω τὸ Δ, καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ΣΗ κύκλου ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΛ, ΔΞ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ,
- 25 ἀπὸ δὲ τοῦ Η αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, τὸν δὲ ΑΒΓ κύκλον τεμνόντων αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ

4 εἰς Heiberg : ἐς G αἰς DEH || 5 ἐναρμόζει G : ἐναρμόζη DEH || 8 post τούτων rep. 4 lin. codd. : corr. Basil. || 8-9 διαιρεθείσας τῆς ὀρθᾶς Basil. : διαιρεθεῖσα τῶν ὀρθῶν codd. || 10 εἰς ἃν Heiberg : ἐς ἃν G & ἴσαν DEH || ἐναρμόζει G : ἐναρμόζη DEH || 14 δείκνυται Wallis : δι' ὧν καὶ codd. || 15 χιλιαγώνου G : χιλιαγωνίου DEH || 16 τῶν Wallis : τᾶς codd. || 17 τοῦ ἀλίου καὶ τοῦ κέντρου add. Heiberg || 19 ἐκβληθὲν Wallis : ἐκβεβληθὲν codd. || 24 Δ ms. G : om. DEH || 26 ΘΜ Basil. : ΘΗ codd.

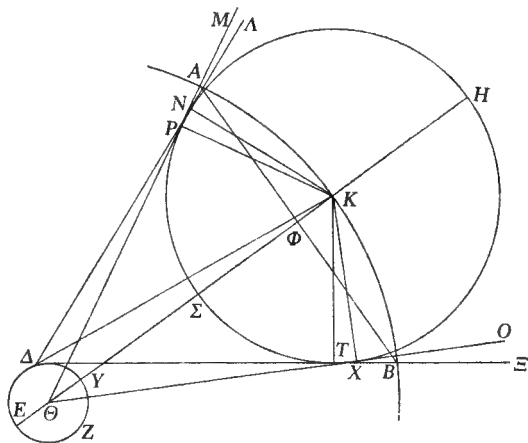


Fig. 58

dès lors, ΘK est supérieur à ΔK du moment que par hypothèse le soleil se trouve au-dessus de l'horizon¹ ; il s'ensuit que l'angle compris entre $\Delta \Lambda$ et ΔE est supérieur à l'angle compris entre ΘM et ΘO . Or l'angle compris entre $\Delta \Lambda$ et ΔE est supérieur à la deux centième partie et inférieur à la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit, puisqu'il est égal à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil ; par conséquent, l'angle compris entre ΘM et ΘO est inférieur à la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit, et le segment de droite AB est inférieur à la corde du secteur circulaire qui est la six cent cinquante-sixième partie² du cercle $AB\Gamma$. Mais le périmètre du polygone indiqué (sc. de mille côtés) a au rayon du cercle $AB\Gamma$ un rapport inférieur au rapport de quarante-quatre à sept, parce que le rapport du périmètre de tout polygone inscrit

1. L'angle $\Theta \Delta K$, qui serait droit si le soleil était à l'horizon, est ainsi obtus.

2. L'angle $M\Theta O$ étant la 164^e partie d'un angle droit, il est égal à un angle au centre correspondant à l'arc qui est la 656^e partie (656 = 4.164) de la circonférence du cercle $AB\Gamma$.

dans un cercle au rayon de ce cercle est inférieur au rapport de quarante-quatre à sept ; tu sais, en effet, que j'ai démontré que dans tout cercle le périmètre est supérieur, d'une quantité plus petite que le septième, au triple du diamètre¹ et que le périmètre du polygone inscrit est inférieur à cette circonférence² ; le rapport de BA à ΘK est donc inférieur au rapport de onze à mille cent quarante-huit ; il s'ensuit³ que BA est inférieur au centième de ΘK . Or le diamètre du cercle ΣH est égal à BA, puisque la moitié de ΣH , le segment ΦA , est égale à KP ; les segments ΘK et ΘA sont en effet égaux, et de leurs extrémités des perpendiculaires sont menées sous le même angle ; il est ainsi évident que le diamètre du cercle ΣH est inférieur à la centième partie de ΘK . De plus, le diamètre $E\Theta Y$ est inférieur au diamètre du cercle ΣH , puisque le cercle ΔEZ est inférieur⁴ au cercle ΣH ; il s'ensuit que la somme de ΘY et de $K\Sigma$ est inférieure à la centième partie de ΘK , de façon que le rapport de ΘK à $Y\Sigma$ est inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Et du moment que ΘK n'est pas inférieur⁵ à ΘP , et que ΣY est inférieur à ΔT , le rapport de ΘP à ΔT est inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Mais puisque dans les triangles rectangles ΘKP et ΔKT les côtés KP et KT sont égaux et les côtés ΘP et ΔT inégaux, ΘP étant plus grand⁶ (sc. que ΔT), le rapport de l'angle compris entre les côtés ΔT et ΔK à l'angle compris entre ΘP et ΘK est supérieur au rapport de ΘK à ΔK , mais inférieur au rapport

1. Cf. *La mesure du cercle*, 3.

2. Cf. *De la sphère et du cylindre*, I.

3. Cf. notes compl.

4. Cf. plus haut l'hypothèse 2.

5. Cf. Eucl. III, 8.

6. Parce que $\Theta K > \Delta K$.

- τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν ἢ τὰ $\overline{m\delta}$ ποτὶ τὰ $\overline{\zeta}$ · ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἁμῶν ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίῳ τῆς διαμέτρου ἐλάσσονι ἢ ἐξδόμῳ μέρει,
- 5 ταύτας δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου · ἐλάττω οὖν λόγον ἔχει ἡ BA ποτὶ τὰν θK ἢ τὰ \overline{ia} ποτὶ τὰ $\overline{αρμ\eta}$ · ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἡ BA τῆς θK ἢ ἑκατοστὸν μέρος. Τῇ δὲ BA ἴσα ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ ΣH κύκλου, διότι καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ ΦA ἴσα ἐστὶ
- 10 τῇ KP · ἴσῃ γὰρ εἰουσᾶν τὰν θK , θA ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζεύγνυνται ὑπὸ τὰν αὐτὰν γωνίαν · δηλὸν οὖν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ΣH κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τῆς θK . Καὶ ἡ $E\theta Y$ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ΣH κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν
- 15 ὁ ΔEZ κύκλος τοῦ ΣH κύκλου · ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφοτέραι αἱ θY , $K\Sigma$ ἢ ἑκατοστὸν μέρος τῆς θK · ὥστε ἡ θK ποτὶ τὰν $Y\Sigma$ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ τὰ $\overline{\rho}$ ποτὶ τὰ $\overline{\varsigma\theta}$. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν θK οὐκ ἐλάττων ἐστὶ τῆς θP , ἡ δὲ ΣY ἐλάττων τῆς ΔT , ἐλάττω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἡ θP
- 20 ποτὶ τὰν ΔT ἢ τὰ $\overline{\rho}$ ποτὶ τὰ $\overline{\varsigma\theta}$. Ἐπεὶ δὲ τῶν θKP , ΔKT ὀρθογωνίων ἐόντων αἱ μὲν KP , KT πλευραὶ ἴσαι ἐντὶ, αἱ δὲ θP , ΔT ἀνίστοι καὶ μείζων ἡ θP , ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τὰν ΔT , ΔK ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομένην ὑπὸ τὰν θP , θK μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἡ θK ποτὶ τὰν ΔK ,

2 ἔχειν G : ἔχει DEH || 5 ταύτας Heiberg : τὰς codd. || 5-6 ἐλάττων ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου add. Heiberg || 6 οὖν rest. Riualtus || ἡ G : ἢ ἡ DEH || 9 ΣH Basil. : EH codd. || 10 θA Heiberg : $\tau\alpha$ θA codd. || 11 ἐπιζεύγνυνται Heiberg : ἐπιζευγνύμεναι codd. || ὑπὸ Heiberg : ἐπὶ codd. || 12 ΣH ms. G : $AB\Gamma$ mss. DEH || 13 διάμετρος G : γωνία DEH || 14 ΣH ms. G : ABH mss. DEH || 15 ΣH ms. G : EH mss. DEH || 16 τῆς Heiberg : τοῦ codd. || 18 θK οὐκ F et Wallis : θKY mss. $DEGH$ || 19 κα Heiberg : καὶ codd. || ἔχει DG : ἔχει EH || 20 τὰν GH : $\tau\alpha$ DE || ἐπεὶ Wallis : ἐπὶ codd. || δὲ add. Heiberg || 22 θP , ἡ Wallis : OPA codd. || ἡ tert. add. Heiberg.

de ΘP à ΔT ; car si dans deux triangles rectangles deux des côtés comprenant l'angle droit sont égaux et les deux autres inégaux, le plus grand des angles apposés aux côtés inégaux a au plus petit de ces angles un rapport supérieur au rapport de la plus grande hypoténuse à la plus petite, mais inférieur au rapport du plus grand des côtés de l'angle droit au plus petit¹. Par conséquent, le rapport de l'angle compris entre $\Delta \Lambda$ et $\Delta \Xi$ à l'angle compris entre ΘO et ΘM est inférieur au rapport de ΘP à ΔT , qui est lui-même inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf ; il s'ensuit que le rapport de l'angle compris entre $\Delta \Lambda$ et $\Delta \Xi$ à l'angle compris entre ΘM et ΘO est lui aussi inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Et comme l'angle compris entre $\Delta \Lambda$ et $\Delta \Xi$ est supérieur à la deux centième partie d'un angle droit, l'angle compris entre ΘM et ΘO est supérieur à quatre-vingt-dix-neuf vingt-millièmes d'un angle droit ; par conséquent, cet angle (sc. ΘOM) est supérieur à un deux cent troisième d'un angle droit². Le segment BA est donc supérieur à la corde du secteur qui est la huit cent douzième partie du cercle $AB\Gamma$. Or c'est au segment de droite AB qu'est égal le diamètre du cercle³ ; il est donc évident que le diamètre du cercle est supérieur au côté du polygone de mille côtés.

II. Ces (sc. relations métriques) admises, on peut démontrer aussi que le diamètre du monde est inférieur à une droite égale à dix mille diamètres de la terre et que, de plus, le diamètre du monde est inférieur à une droite égale à cent myriades de myriades de stades⁴. Du moment, en effet, qu'on a admis que le diamètre du soleil n'est pas supérieur à trente diamètres

1. Cf. *Eucl.* VI, 33 ; Ptolémée, *Almageste* I, 10.

2. Parce que $\frac{20\ 000}{203} = 98 \frac{106}{203} < 99$.

3. C'est-à-dire le diamètre du cercle ΣH .

4. C'est-à-dire dix milliards de stades.

ἐλάττω δὲ ἢ ἡ ΘP ποτὶ τὰν ΔT · εἰ γάρ κα δυὼν τριγώνων
 ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἄτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν
 γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἄτεραι ἄνισοι, ἡ μείζων γωνία
 τὰν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα μείζονα
 5 μὲν ἔχει λόγον ἢ ἡ μείζων γραμμὰ τὰν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν
 γωνίαν ὑποτείνουσάν ποτὶ τὰν ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ ἢ
 ἡ μείζων γραμμὰ τὰν περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν
 ἐλάττονα. Ὡστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τὰν $\Delta\Lambda$,
 $\Delta\Xi$ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομένην ὑπὸ τὰν ΘO , ΘM
 10 ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ ἡ ΘP ποτὶ τὰν ΔT , ἅτις ἐλάττω
 λόγον ἔχει ἢ τὰ $\bar{\rho}$ ποτὶ τὰ $\overline{\varphi\theta}$ · ὥστε καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχο-
 μένα ὑπὸ τὰν $\Delta\Lambda$, $\Delta\Xi$ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομένην
 ὑπὸ τὰν ΘM , ΘO ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ $\bar{\rho}$ ποτὶ τὰ $\overline{\varphi\theta}$.
 Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τὰν $\Delta\Lambda$, $\Delta\Xi$
 15 μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, εἴη καὶ ἡ γωνία ἡ
 περιεχομένη ὑπὸ τὰν ΘM , ΘO μείζων ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρε-
 θείσας ἐς δισμύρια τούτων $\overline{\varphi\theta}$ μέρεια · ὥστε μείζων ἐστὶν
 ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\bar{\sigma}$ καὶ $\bar{\gamma}$ τούτων ἐν μέρος.
 Ἄρα BA μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτείνουσας ἐν τμήμα
 20 διηρημένας τᾶς τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου περιφερείας εἰς $\omega\beta$.
 Τᾷ δὲ AB ἴσα ἐντὶ ἡ τοῦ ἀλίου διάμετρος · δηλὸν οὖν
 ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ἀλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου
 πλευρᾶς.

II. Τούτων δὲ ὑποκειμένων δείκνυται καὶ τάδε · οἷον ἡ
 25 διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων
 ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου
 ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες $\bar{\rho}$. Ἐπεὶ γὰρ
 ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἀλίου μὴ μείζω εἶμεν ἢ

5 τᾶν G : τᾷ DEH || 6 ὑποτείνουσάν Wallis : ὑποτείνουσα
 codd. || ποτὶ G : om. DEH || 9 ΘO Wallis : ΘN codd. || 15 εἴη
 κα G : ἢ εἴκα DEH || 17 μέρεια Wallis : μέρος codd. || 20 εἰς
 Heiberg : ἐς G αἰς DEH || 21 τᾷ EG : τὰν DH || 28 μείζω
 Wallis : μείζων DEH μείζονα G.

de la lune¹, et que le diamètre de la terre est supérieur au diamètre de la lune², il est évident que le diamètre du soleil est inférieur à trente diamètres de la terre. Comme on a démontré, de plus, que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde, il est clair que le périmètre du polygone indiqué de mille côtés est inférieur à mille diamètres du soleil. Or le diamètre du soleil est inférieur à trente diamètres de la terre ; il s'ensuit que le périmètre du polygone de mille côtés est inférieur à trente mille diamètres de la terre. Du moment donc que le périmètre du polygone de mille côtés est inférieur à trente mille diamètres de la terre et supérieur à trois diamètres (sc. de la sphère) du monde — on a démontré en effet que dans tout cercle le diamètre est inférieur au tiers du périmètre de tout polygone régulier, inscrit dans le cercle, dont le nombre des côtés est supérieur à celui de l'hexagone³ —, le diamètre (sc. de la sphère) du monde est inférieur à dix mille diamètres de la terre. On a ainsi démontré que le diamètre du monde est inférieur à dix mille diamètres de la terre ; que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades, cela ressort avec évidence de ce qui suit ; puisque, en effet, on a supposé que le périmètre de la terre n'est pas supérieur à trois cent myriades de stades⁴, et que le diamètre de la terre est supérieur

1. Cf. hypoth. 3.

2. Cf. hypoth. 2.

3. Le périmètre de l'hexagone est en effet exactement égal au triple du diamètre, cf. Eucl. IV, 15, coroll., et le périmètre croît avec le nombre des côtés des polygones.

4. Cf. hypoth. 4.

- τριακονταπλασίονα τᾷς διαμέτρου τᾷς σελήνας, τὴν δὲ διάμετρον τᾷς γᾶς μείζω εἶμεν τᾷς διαμέτρου τᾷς σελήνας, δηλὸν ὥς ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τᾷς γᾶς. Πάλιν
- 5 δέ, ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾷς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾷς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερόν ὅτι ἡ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. Ἄ δὲ διάμετρος
- 10 τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τᾷς γᾶς ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τᾷς γᾶς. Ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου τᾷς μὲν διαμέτρου τᾷς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίῳ,
- 15 τᾷς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίῳ δέδεικται γὰρ τοι διότι παντὸς κύκλου ἡ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου τᾷς περιμέτρου, ὃ καὶ ἰσόπλευρον ἢ καὶ πολυγωνότερον τοῦ ἐξαγώνου ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ ἢ καὶ ἡ διάμετρος
- 20 τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τᾷς γᾶς. Ἄ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίῳ τᾷς διαμέτρου τᾷς γᾶς δέδεικται ὅτι δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες $\bar{\rho}$ ἐκ τούτου δηλὸν ὅτι ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται
- 25 τὴν περίμετρον τᾷς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων, ἡ δὲ περίμετρος τᾷς γᾶς μείζων ἐστὶν

1 τριακονταπλασίονα G : τριακονταπλασίῳ DEH || 2 μείζω Wallis : μείζων DEH μείζονα G || 17 τᾷς add. Heiberg || 18 κα Wallis : καὶ codd. || ἰσόπλευρον ἢ Heiberg : εἰς δ' ΕΘ πλευρᾷ ἐόν codd. || πολυγωνότερον Heiberg : πολυγώνου ὅτι codd. || 19 ἐγγεγραμμένον Wallis : ἐγγεγραμμένου codd. || ἐν Heiberg : μὲν codd. || τῷ κύκλῳ Wallis : τοῦ κύκλου codd. || 22-23 τᾷς γᾶς — διάμετρος add. Heiberg || 25 τὴν G : τὸν DEH || 26 ἡ Wallis : ἐστὶν ἡ codd.

au triple du diamètre, parce que dans tout cercle la circonférence est supérieure au triple du diamètre¹, il est évident que le diamètre de la terre est inférieur à cent myriades de stades. Du moment donc que le diamètre (sc. de la sphère) du monde est inférieur à dix milles diamètres de la terre, il est évident que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades. Telles sont mes hypothèses au sujet des grandeurs et des distances. Voici maintenant ce que j'admets au sujet du sable : si on a une quantité de sable dont le volume ne dépasse pas celui d'une graine de pavot, le nombre de ses grains de sable ne dépassera pas dix mille, et le diamètre de la graine ne sera pas inférieur à un quarantième de doigt. Je fais ces hypothèses à la suite des observations que voici : des graines de pavot ayant été posées sur une règle polie suivant une ligne droite de manière qu'elles se touchaient l'une l'autre, vingt-cinq graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Supposant donc le diamètre de la graine plus petit je lui prête environ un quarantième de doigt, et pas moins, désirant là aussi mettre la démonstration de la proposition à l'abri de toute contestation.

III. Voilà donc mes hypothèses ; mais je crois utile de m'expliquer sur la dénomination des nombres, pour que ceux des lecteurs, qui n'ont pas eu entre les mains mon livre adressé à Zeuxippe, ne soient pas déroutés par l'absence, dans le présent livre, d'une indication préalable au sujet de cette dénomination. Il se trouve ainsi que la tradition nous ait transmis les noms des nombres jusqu'à dix mille, et nous distinguons suffisamment les nombres dépassant les dix

1. Cf. *La mes. du cercle*, 3.

- ἢ τριπλασία τᾶς διαμέτρου διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίονα τᾶς διαμέτρου, δῆλον ὡς ἂ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων $\bar{\rho}$ μυριάδες. Ἐπεὶ οὖν ἂ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων
- 5 ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἂ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες $\bar{\rho}$. Περὶ μὲν οὖν τῶν μεγεθῶν καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι, περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε· εἴ κα ἦ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου
- 10 μὴ μείζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάττονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου. Ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον· ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι ἀπτόμεναι
- 15 ἀλλαλᾶν, καὶ ἀνέλαβον αἱ $\overline{\kappa\epsilon}$ μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλίου μάκεος. Ἐλάττονα οὖν τιθεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου καὶ μὴ ἐλάττονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατα δέικνυσθαι τὸ προκείμενον.
- 20 III. Ἄ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα· χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένον.
- 25 Συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἀμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν

1 ἢ G : om. DEH || 2 τριπλασίονα G : τριπλασίων DEH || 4 μυριάδες Heiberg : μυριάδων codd. || 7 μὲν οὖν τῶν add. Heiberg || 10 μείζον G : μείζων DEH || 12 τετρωκοστομόριον E : τετρωκοντομόριον DGH || 16 οὖν add. Heiberg || 19 ἀναμφιλογώτατα Heiberg : ἀναμφιλογώτατον codd. || 22 περιτετευχότες Nizzius : περιτεύατ' ἐς codd. || τῷ Wallis : τὸ codd. || 24 προειρημένον Riualtus : προειρημένων codd. || 25 τὸ Wallis : τὰ codd. || 26 τὸ add. Heiberg.

mille en énumérant le nombre des myriades jusqu'à la myriade de myriades. Nous appellerons donc premiers nombres ceux qui, d'après la nomenclature actuelle, vont jusqu'à la myriade de myriades ; nous appellerons unité de nombres seconds la myriade de myriades de premiers nombres, et nous compterons dans les nombres seconds des unités et, à partir des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades jusqu'à la myriade de myriades. Nous appellerons de nouveau unité de nombres troisièmes la myriade de myriades de nombres seconds, et nous compterons dans les nombres troisièmes des unités et, à partir des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades jusqu'à la myriade de myriades. De la même manière, nous appellerons unité de nombres quatrièmes la myriade de myriades de nombres troisièmes, unité de nombres cinquièmes la myriade de myriades de nombres quatrièmes, et en progressant ainsi les nombres auront leur dénomination jusqu'à la myriade de myriades des nombres cent millionièmes.

Les nombres distingués ainsi pourraient suffire certes, mais il est possible d'aller encore plus loin. Appelons en effet nombres de la première période les nombres énoncés jusqu'ici, et unité de premiers nombres de la seconde période le dernier nombre de la première période. Appelons encore unité de nombres seconds de la deuxième période la myriade de myriades

- μυρίων [μέν] ἀποχρεόντως γινώσκομες μυριάδων ἀριθμὸν
 λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυριάδας. Ἔστων οὖν
 ἀμῖν οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας
 πρῶτοι καλούμενοι, τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι
 5 μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσ-
 θων τῶν δευτέρων μονάδες καὶ ἐκ τῶν μονάδων δεκάδες
 καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας
 μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων
 ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθων
 10 τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τῶν μονάδων δεκάδες
 καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας
 μυριάδας. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν
 μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ
 αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω
 15 πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ αἰ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ
 τὰ ὀνόματα ἐχόντων ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν
 μυρίας μυριάδας. Ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον
 οἱ ἀριθμοὶ γινωσκόμενοι, ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλεον προάγειν.
 Ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου
 20 καλούμενοι, α δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τῆς πρώτας περιόδου
 μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν.
 Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῆς δευτέρας περιόδου

1 μὲν codd. : del. Heiberg || γινώσκομες Gertz : ἐγινώσ-
 κομεν codd. || 2 ἔστε Heiberg : ἐς τοῖς codd. || μυρίας add.
 Wallis || ἔστων Wallis : ἔστω codd. || 3 τὰς Wallis : τὰ DG τὰν
 EH || μυρίας μυριάδας Wallis : μυρίαν μυριάδων codd. || 5
 ἀριθμῶν add. Wallis || ἀριθμείσθων Heiberg : ἀριθμῶν codd.
 || 6 ἐκ τῶν Heiberg : ἑκατὸν DEH αἱ ἀπὸ τῶν G || 7 ἐς τὰς
 Wallis : ἔσται DEH ἔστε G || 7-8 μυρίας μυριάδας Wallis :
 μυρίων μυριάδων codd. || 9 ἀριθμείσθων Heiberg : ἀριθμείσθω
 codd. || 10 ἀπὸ Heiberg : αἱ ἀπὸ codd. || 11 ἐς τὰς Wallis : ἔσται
 DEH ἔστε G || 11-12 μυρίας μυριάδας Wallis : μυρίαν μυριάδες
 codd. || 16 ἐχόντων Wallis : ἔχοντες codd. || ἐς τὰς Wallis : ἔσται
 codd. || 17 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. ||
 ἀποχρέοντι EG : ἀποχρέωντι DH || ἐπὶ τοσοῦτον Heiberg : ἀπὸ
 τοσοῦτων codd. || 20 πρώτας G : om. DEH.

de premiers nombres de la deuxième période. De la même manière, le dernier, aussi de ces nombres, s'appellera unité de nombres troisièmes de la deuxième période, et continuant ainsi à progresser les nombres de la deuxième période auront leur nom jusqu'à la myriade de myriades de nombres cent millionnièmes. Le dernier nombre de la deuxième période s'appellera à son tour unité de premiers nombres de la troisième période, et ainsi de suite jusqu'à la myriade de myriades de nombres dix mille myriadièmes de la dix mille myriadième période.

Ces nombres ainsi dénommés, s'il y a des nombres en proportion rangés par ordre à partir de l'unité, et si le nombre le plus voisin de l'unité est la dizaine, les huit premiers de ces nombres, y compris l'unité, appartiendront aux nombres appelés premiers nombres, les huit suivants aux nombres appelés seconds, et les autres de la même manière aux nombres dénommés d'après la distance de leur octade de nombres à la première octade de nombres. Le huitième nombre de la première octade est donc mille myriades, et le premier nombre de la deuxième octade, puisqu'il est décuple du nombre qui le précède, sera une myriade de myriades, et ce nombre est l'unité des nombres seconds. Le huitième nombre de la seconde octade est mille myriades de nombres seconds. Le premier nombre de la troisième octade sera de nouveau, comme étant le décuple du nombre qui le précède, une myriade de myriades de nombres seconds, nombre qui est l'unité des nombres troisièmes. Il est évident qu'il en sera comme nous venons de l'indiquer pour une octade quelconque.

Il est utile de connaître aussi ce qui suit. Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que

- πρώτων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τᾷς δευτέρας περιόδου
 δευτέρων ἀριθμῶν. Ὅμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος
 μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν,
 καὶ αἰεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες τὰ ὀνόματα ἐχόντων
 5 τᾷς δευτέρας περιόδου ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν
 μυρίας μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾷς
 δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου
 πρώτων ἀριθμῶν, καὶ αἰεὶ οὕτως προαγόντων ἐς τὰς
 μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν
 10 μυρίας μυριάδας. Τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴ
 κα ἔωντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐξῆς κείμενοι,
 ἡ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκάς ῥη, ὁκτῶ μὲν αὐτῶν οἱ πρῶτοι
 σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται,
 οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὁκτῶ τῶν δευτέρων καλουμένων,
 15 καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων
 καλουμένων ἐσσοῦνται τῇ ἀποστάσει τᾷς ὁκτάδος τῶν
 ἀριθμῶν ἀπὸ τᾷς πρώτας ὁκτάδος τῶν ἀριθμῶν. Τᾷς
 μὲν οὖν πρώτας ὁκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἡ ὄγδοός ἐστιν
 ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες, τᾷς δὲ δευτέρας ὁκτάδος ὁ
 20 πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶν τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύρια
 μυριάδες ἐσσεῖται · οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν δευτέρων
 ἀριθμῶν. Ὁ δὲ ὄγδοος τᾷς δευτέρας ὁκτάδος ἐστὶ χίλιαι
 μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ τᾷς τρίτας
 ὁκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ,
 25 μύρια μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν · οὗτος
 δὲ ἐστὶν μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Φανερόν δὲ ὅτι καὶ
 πολλοσταὶ ὁκτάδες ἐξοῦντι ὡς εἴρηται. Χρήσιμον δὲ
 ἐστὶ καὶ τόδε γινγνωσκόμενον. Εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾷς

1 πρώτων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τᾷς δευτέρας περιόδου add. Wallis || 5 ἐς τὰς Wallis : ἔσται DEGH || 6 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. || 8 ἐς τὰς Wallis : ἔσται codd. || 10 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. || 12 μὲν Heiberg : εἴην codd. || 14 καλουμένων Wallis : καλούμενοι codd. || 16 τῶν add. Heiberg || 17 τᾷς G : ἡ DEH || 26 ὅτι Basil. : ἐστὶ DEH ἐστὶν ὅτι G || 27 πολλοσταὶ Heiberg : πολλὰι codd.

certaines de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés de l'unité. Soit en effet les nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda$, en proportion à partir de l'unité, et soit A l'unité ; multiplions Δ par Θ , et soit X le produit. Prenons donc dans la proportion le nombre Λ dont la distance à Θ compte autant de nombres que la distance de Δ à l'unité ; il faut démontrer que X est égal à Λ . Du moment donc que, parmi des nombres en proportion, la distance de Δ à A compte autant de nombres que celle de Λ à Θ , le rapport de Δ à A est égal au rapport de Λ à Θ . Or Δ est le produit de Δ par A , d'où il suit que Λ est le produit de Δ par Θ ; par conséquent Λ est égal à X . Il est donc évident que le produit est dans la (sc. même) proportion, et que sa distance au plus grand facteur compte autant de nombres que la distance du plus petit facteur à l'unité. Mais il est aussi clair que ce produit est éloigné, de l'unité, de la somme, moins un, des distances des nombres Δ et Θ à l'unité ; car $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ sont les nombres dont Θ est éloigné de l'unité, et I, K, Λ sont, à un nombre près, ceux dont Δ est éloigné de l'unité ; en ajoutant Θ , on a la somme des distances¹.

1. Dans la suite de nombres proportionnels :

$$1, a^1, a^2, \dots a^{n-1}, a^n, \dots a^m, a^{m+1}, \dots a^{m+n}$$

où le rang de chaque nombre est égal à son exposant augmenté de 1, la distance du produit $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ à a^m est donc mesurée par $(n+1)$ nombres, et sa distance à l'unité par $(m+n+1)$ nombres ; or $m+n+1 = (m+1) + (n+1) - 1$.

- μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλήλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαζάντων ἀλλήλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν
- 5 πολλαπλασιαζάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἐνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιαζάντες ἀλλήλους. Ἔστων γὰρ ἀριθμοὶ τινες ἀνάλογον ἀπὸ μονάδος οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ,
- 10 Ι, Κ, Λ, μονὰς δὲ ἔστω ὁ Α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ Δ τῷ Θ, ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ Χ. Λελάφθω δὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\Lambda}{\Delta} = \frac{\Theta}{\Delta}$ ἀπέχων ἀπὸ τοῦ Θ τοσούτους, ὅσους ὁ Δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Χ τῷ Λ. Ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἀριθμῶν ἴσους ἀπέχει
- 15 ὁ τε Δ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ὁ Λ ἀπὸ τοῦ Θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ Δ ποτὶ τὸν Α, ὃν ὁ Λ ποτὶ τὸν Θ. Πολλαπλασιῶν δὲ ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α τῷ Δ· πολλαπλασιῶν ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ Λ τοῦ Θ τῷ Δ· ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ Λ τῷ Χ. Δῆλον οὖν ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ
- 20 μείζονος τῶν πολλαπλασιαζάντων ἀλλήλους ἴσους ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάττων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. Φανερόν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἐνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος οἱ Δ, Θ· οἱ μὲν γὰρ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τοσούτοί ἐντι,
- 25 ὅσους ὁ Θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ Ι, Κ, Λ ἐνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσους $\frac{\Lambda}{\Delta}$ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· σὺν γὰρ τῷ Θ τοσούτοί ἐντι.

1 ἐόντων EG : ἐόντων DH || πολλαπλασιάζωντί Heiberg : πολλαπλασιάζοντες codd. || 2 ὁ γενόμενος Wallis : ὅταν ὁμοίως codd. || 3 μὲν τοῦ μείζονος Heiberg : μὲν οὖν codd. || 5 ἀπέχει E : ἀπέχη DGH || 7 ὁ add. Heiberg || οὓς Wallis : ὡς codd. || ἀπέχοντι E : ἀπέχωντι DGH || 9 μονάδος GH : μάδος DE || 11 Χ. Λελάφθω Heiberg : ΧΛ εἰλήφθω codd. || ἐκ Heiberg : ὁ ΘΚ codd. || 12 Λ Wallis : ΦΛ codd. || 13 μονάδος GH : μάδος DE || 14 ἀριθμῶν Heiberg : ἴσων codd. || 15 τὸν αὐτὸν GH : τὰν αὐτὰν DE || 20 ἴσους Heiberg : ἴσον codd. || 24 οἱ Δ, Θ· οἱ μὲν γὰρ Heiberg : οἶδε μὲν γὰρ οἱ codd. || 25 ἐνὶ G : ἐπὶ DEH.

IV. Ce qui précède étant en partie admis, en partie démontré, je vais démontrer ma proposition. Comme nous avons supposé le diamètre de la graine de pavot non inférieur au quarantième d'un doigt, il est évident que la capacité de la sphère ayant un diamètre d'un doigt ne dépasse pas celle de soixante-quatre mille graines de pavot ; car ce nombre indique combien de fois elle est multiple de la sphère ayant pour diamètre un quarantième de doigt ; il a été démontré, en effet, que les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres¹. Comme on a supposé, d'autre part, que le nombre des grains de sable contenus dans un volume égal à celui d'une graine de pavot ne dépasse pas dix mille², il est évident que, si la sphère ayant un diamètre d'un doigt était remplie de sable, le nombre des grains ne dépasserait pas soixante-quatre mille myriades. Or ce nombre représente six unités de nombres seconds augmentées de quatre mille myriades de premiers nombres ; il est donc inférieur à dix unités de nombres seconds. La sphère d'un diamètre de cent doigts est équivalente à cent myriades de sphères d'un diamètre d'un doigt, puisque les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres¹. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des dix myriades de

1. Cf. Eucl. XII, 18.

2. Cf. II, fin.

- IV. Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδειγμένων, τὸ προκείμενον δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἂ σφαῖρα ἂ δακτυλιαίαν
- 5 ἔχουσα τὰν διάμετρον οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας· τᾶς γὰρ σφαῖρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρωκοστομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶν τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ· δέδεικται γάρ τοι ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον
- 10 ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τὰν διαμέτρων. Ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν τοῦ εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, δῆλον ὡς, εἰ πληρωθεῖη ψάμμου ἂ σφαῖρα ἂ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων κα εἴη ἢ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ
- 15 ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. Οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς μονάδες τε ζ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλια· ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἢ ἰ μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀ δὲ τῶν ρ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς δακτυλιαίαν
- 20 ἐχούσας τὰν διάμετρον σφαῖρας ταῖς ρ μυριάδεσσιν διὰ τὸ τριπλάσιον λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων τὰς σφαῖρας. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλικά ἐστὶν ἂ σφαῖρα ἂ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ, δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσσεῖται
- 25 ἢ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τὰν δέκα μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν

4 ἂ alt. add. Heiberg || 7 τετρωκοστομόριον Ahrens : τετρωκοστομόριον codd. || 10 ἔχοντι E : ἔχωντι DGH || 11 τοῦ alt. add. Heiberg || μάκωνος GH : μάκωνος DE || 12 μείζονα Wallis : μείζων codd. || 14 μείζων Wallis : μείζον codd. || εἴη Wallis : ἐν codd. || 17 μονάδες Riualtus : μυριάδες codd. || 20 τὰν GH : τῶν DE || σφαῖρας Heiberg : ἔφη codd. || 21 διαμέτρων Wallis : διάμετρον codd. || 25-26 πολλαπλασιασθεῖσάν GH : πολλαπλασθεῖσάν DE.

nombres seconds par cent myriades. Mais comme les dix unités de nombres seconds constituent le dixième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle de raison dix, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le nombre obtenu sera le seizième à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle ; car on a démontré¹ que la distance de ce produit à l'unité est égale à la somme, diminuée de un, des distances, à l'unité, de ses deux facteurs. De ces seize nombres les huit premiers font partie, avec l'unité, des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants font partie des nombres seconds, et le dernier d'entre eux est de mille myriades de nombres seconds. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent doigts est inférieur à mille myriades de nombres seconds. De même, le volume de la sphère d'un diamètre d'une myriade de doigts est cent myriades de fois multiple du volume de la sphère d'un diamètre de cent doigts. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de dix mille doigts, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des mille myriades de nombres seconds par cent myriades. Mais comme mille myriades de nombres seconds sont le seizième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et que cent myriades sont le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite propor-

1. Cf. III, milieu.

- ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τῇ τῶν δεκαπλασίων ὄρων ἀναλογίᾳ, αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἔβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτᾶς ἀναλογίας,
- 5 δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τῆς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος· δέδεικται γὰρ ὅτι ἐνὶ ἐλάσσονας ἀπέχει ἀπὸ τῆς μονάδος ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιαῶντες ἀλλήλους. Τῶν δὲ ἑκκαίδεκα
- 10 τούτων ὀκτῶ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρῶτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτῶ τῶν δευτέρων, καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες δευτέρων ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν διάμετρον $\bar{\rho}$
- 15 δακτύλων ἐχούσα ἑλαττόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἡ τῶν μυρίων δακτύλων ἐχούσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία ἐστὶν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον $\bar{\rho}$ δακτύλων ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλι-
- 20 καύτα τὸ μέγεθος, ἀλικά ἐστὶν ἡ ἐχούσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθειςᾶν τὰν χιλιάων μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι
- 25 μυριάδες ἑκκαιδέκατος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ $\bar{\rho}$ μυριάδες ἔβδομος ἀπὸ μονάδος ἐν τῇ

1 ἐπεὶ Wallis : ἐπὶ codd. || δ' αἱ Gertz : δὲ codd. || 3 τῇ Wallis : τε codd. || δεκαπλασίων Wallis : δεκαπλευρών codd. || ἀναλογίᾳ Wallis : ἀνάλογον codd. || 5 ἀριθμὸς Heiberg : εκτος codd. || 7 ἐνὶ Rualtus : ἐν codd. || ἀπέχει add. Wallis || ἢ ὅσος Wallis : ασσος DE & ὅσος GH || 8 ὁ ἀριθμὸς Wallis : ἐλάττων codd. || συναμφοτέρων Wallis : σύναμφο δὲ codd. || ἀπέχοντι EG : ἀπέχωντι DH || 14 τὰν Wallis : τε τὰν codd. || 15 ἑλαττόν Wallis : ἐλάττων codd. || 26 ἀνάλογον, αἱ Wallis : ἀναλογίαι codd.

tionnelle, il est évident que le produit sera le vingt-deuxième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle¹. De ces vingt-deux nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants font partie des nombres appelés seconds, et les six restants des nombres appelés troisièmes, le dernier d'entre eux étant de dix myriades de nombres troisièmes. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille doigts est inférieur à dix myriades de nombres troisièmes. Et comme la sphère ayant un diamètre d'un stade est inférieure à la sphère d'un diamètre de dix mille doigts, il est évident qu'aussi le nombre des grains de sable contenus dans un volume équivalent à celui d'une sphère d'un diamètre d'un stade est inférieur à dix myriades de nombres troisièmes. De même, le volume d'une sphère d'un diamètre de cent stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère ayant un diamètre d'un stade. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix myriades de nombres troisièmes par cent myriades. Et comme les dix myriades de nombres troisièmes sont le vingt-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le vingt-huitième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle¹. De ces vingt-huit nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants

1. Cf. III, milieu.

αὐτῇ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ■ γενόμενος ἐσσεῖται δυο-
 καιεικοστός τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος.
 Τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων ὁκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν
 τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὁκτὼ δὲ οἱ μετὰ
 5 τούτους τῶν δευτέρων καλουμένων, οἱ δὲ λοιποὶ ἕξ τῶν
 τρίτων καλουμένων, καὶ ὁ ἕσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα
 μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τὸ τοῦ
 ψάμμου πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ
 τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων ἔλασσόν ἐστιν
 10 ἢ ἰ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν
 ἡ σταδιαία ἐχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα τῆς σφαίρας
 τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον
 ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον
 τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν ἔλασσόν
 15 ἐστὶν ἢ ἰ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ ἡ
 σφαῖρα ἡ ἐχουσα τὰν διάμετρον \bar{p} σταδίων πολλα-
 πλασίῳ ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον
 σταδιαίαν ταῖς \bar{p} μυριάδεσσι. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ
 ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλῖκα ἐστὶν ἡ
 20 ἐχουσα τὰν διάμετρον \bar{p} σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων
 ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ
 πολλαπλασιασθειςὴν τῶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν
 ταῖς \bar{p} μυριάδεσσι. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν
 δέκα μυριάδες δυοκαιεικοστός ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνά-
 25 λογον, αἱ δὲ \bar{p} μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς
 αὐτῆς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὁκτω-
 καιεικοστός ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. Τῶν
 δὲ ὁκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων ὁκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ
 μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους
 30 ἄλλοι ὁκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὁκτὼ

4-5 μετὰ τούτους Heiberg : μετὰ τοὺς codd. || 5 τῶν pr. add.
 Heiberg || ἕξ Wallis : ἐκ codd. || ■ τρίτων G : τριῶν DEH ||
 8 μέγεθος G : μεγέθους codd. || 19 ἡ add. Wallis.

des nombres troisièmes, et les quatre restants des nombres appelés quatrièmes, le dernier étant de mille unités de nombres quatrièmes. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent stades est inférieur à mille unités de nombres quatrièmes. De même, le volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère ayant un diamètre de cent stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de mille unités de nombres quatrièmes par cent myriades. Comme les mille unités de nombres quatrièmes représentent le vingt-huitième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera, dans la même suite proportionnelle, le trente-quatrième nombre à partir de l'unité. Or de ces trente-quatre nombres, les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, et les deux restants des nombres appelés cinquièmes, le dernier d'entre eux étant de dix unités de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades sera inférieur à dix unités de nombres cinquièmes. Et de même, le volume d'une sphère d'un diamètre de cent myriades

- τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλου-
 μένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν
 τετάρτων ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου
 πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν
 5 διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων $\bar{\rho}$ ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι
 μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὴ ἡ σφαῖρα ἡ
 ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων πολλαπλασία
 ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων $\bar{\rho}$
 ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα
 10 ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλῖκα ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα
 τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἔλασσον
 ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ
 πολλαπλασιασθειςᾶν τῶν χιλιάων μονάδων τῶν τετάρτων
 ἀριθμῶν ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν τετάρτων
 15 ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτωκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ
 μονάδος ἀνάλογον, αἱ δ' ἑκατὸν μυριάδες ἔβδομος ἀπὸ
 μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ἡ γεγόμενος
 ἐσσεῖται ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας τέταρτος καὶ τριακοστός
 ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων
 20 ὀκτῶ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλου-
 μένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτῶ τῶν δευτέρων, καὶ
 οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτῶ τῶν τρίτων, καὶ οἱ μετὰ
 τούτους ὀκτῶ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων
 καλουμένων ἐσσοῦνται, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα
 25 μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ
 ψάμμου πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ
 τῇ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων ἔλασσον ἐσσεῖται
 ἢ ἡ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὴ ἡ σφαῖρα
 ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων $\bar{\rho}$ μυριάδων πολλα-

11 διάμετρον GH : διαμέτρων DE || ἔλασσον EGH : ἐλάσ-
 σων D || 22 ἄλλοι Basil. : οἱ ἄλλοι codd. || 25 μονάδες G :
 μονάδων DEH || 26 μέγεθος GH : μεγέθους DE || 27 ἔλασσον
 G : ἐλάσσων DEH || 29 μυριάδων Basil. : μυριάδας codd.

de stades est cent myriades fois multiple du volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix unités de nombres cinquièmes par cent myriades. Comme les dix unités de nombres cinquièmes représentent le trente-quatrième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera, dans la même suite proportionnelle, le quarantième nombre à partir de l'unité. Or de ces quarante nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, les huit suivants des nombres appelés cinquièmes, le dernier d'entre eux étant de mille myriades de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de stades est inférieur à mille myriades de nombres cinquièmes. Mais le volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de stades. Dès lors, si on avait une sphère, remplie de sable, de la grandeur d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de

- πλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἔχουσας σταδίων μυρίων ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλικά ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων $\bar{\rho}$ μυριάδων,
- 5 δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθειςᾶν τὰν δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες τέταρτός ἐστι καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ $\bar{\rho}$ μυριάδες
- 10 ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γεγόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὁκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὁκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ
- 15 μετὰ τούτους ἄλλοι ὁκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὁκτὼ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὁκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ
- 20 σφαίρᾳ τῇ τὰν διάμετρον ἔχουσᾳ σταδίων $\bar{\rho}$ μυριάδων ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Ἄ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάδων πολλαπλασίῳ ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἔχουσας τὰν διάμετρον σταδίων $\bar{\rho}$ μυριάδων ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν.
- 25 Εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλικά ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδων, φανερόν ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ

1 τᾶς alt. add. Heiberg || 13 καλουμένων DEG : καμένων H || 20 μυριάδων Wallis : μυριάδες codd. || 21 ἔλασσόν E : ἐλάσσων DGH || 22 σφαῖρα DG : σφαίρας EH || μυριάδων Wallis : μυρίας codd. || 25 δὲ Heiberg : δὲ codd. || 27 μυριάδων Wallis : μυρίας codd. || ἔλασσον GH : ἐλάσσων DE.

sable y serait inférieur au produit de mille myriades de nombres cinquièmes par cent myriades. Or comme les mille myriades de nombres cinquièmes représentent le quarantième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le quarante-sixième nombre à partir de l'unité. De ces quarante-six nombres, les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, les huit suivants, placés à la suite des nombres quatrièmes, des nombres cinquièmes, et les six restants des nombres appelés sixièmes, le dernier d'entre eux étant de dix myriades de nombres sixièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades est inférieur à dix myriades de nombres sixièmes. Mais le volume d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de myriades de stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur d'une sphère d'un diamètre d'un million de myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix myriades de nombres sixièmes par cent myriades. Or du moment que les dix myriades de nombres

- ψάμμου πλήθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασ-
 θεισάν τῶν χιλιάδων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς
 $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν
 χίλιαι μυριάδες τετρωκοστός ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον,
 5 αἱ δὲ $\bar{\mu}$ μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς
 ἀναλογίας, δῆλον ὡς $\bar{\epsilon}$ γένόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ
 τετρωκοστός ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ
 ἑξ τούτων ὀκτῶ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρῶτων
 καλουμένων ἐντί, ὀκτῶ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων,
 10 καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτῶ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ
 τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτῶ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς
 τετάρτους ὀκτῶ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ ἑξ τῶν ἕκτων
 καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἕσχατος αὐτῶν ἐστὶ $\bar{\iota}$ μυριάδες
 τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου
 15 πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν
 διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάδων μυριάδων ἔλασσόν
 ἐστὶν ἢ $\bar{\iota}$ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Ἄ δὲ τὰν διάμετρον
 ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων $\bar{\rho}$ πολλα-
 πλασία ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσας τὰν διάμετρον
 20 σταδίων μυριάδων μυριάδων ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν
 γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος,
 ἀλικά ἐστὶν ἡ σφαῖρα ἡ ἐχούσα τὰν διάμετρον σταδίων
 μυριάκις μυριάδων $\bar{\rho}$, φανερόν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος
 ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλα-
 25 σιασθεισάν τῶν $\bar{\iota}$ μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν ταῖς $\bar{\rho}$
 μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν ἕκτων ἀριθμῶν δέκα

1 πολλαπλασιασθεισάν G : πολλαπλάσιον DEH || 8 ὀκτῶ μὲν
 Wallis : εἴμεν DEH οἱ μὲν ὀκτῶ G || 9 μετὰ τούτους EH : μετὰ
 τοὺς DG || 12 ἑξ Wallis : om. DEH τῶν ἑξ G || 13 αὐτῶν G :
 αὐτὸς DEH || μυριάδες Wallis : μυριάδων codd. || 16 μυριάδων
 μυριάδων Heiberg : μυριάκις μυριάδων μυριάδων codd. || ἔλασσόν
 Riualtus : ἐλάσσων codd. || 18 ἔχουσα GH : ἐχούσας DE || 20
 μυριάδων μυριάδων Heiberg : μυριάδας μυριάς DEH μυριάκις
 μυριάδων G || 24 πολλαπλασιασθεισάν G : πολλαπλάσιον DEH
 || 25-26 ταῖς $\bar{\rho}$ μυριάδεσσιν Wallis : τῶν $\bar{\rho}$ μυριάδες codd.

sixièmes représentent le quarante-sixième nombre, à partir de l'unité, de la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le cinquante-deuxième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle. Or de ces cinquante-deux nombres les quarante-huit premiers, avec l'unité, appartiennent aux nombres appelés premiers nombres, nombres seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes, et les quatre restants font partie des nombres appelés septièmes, le dernier d'entre eux étant de mille unités de nombres septièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de myriades de stades est inférieur à mille unités de nombres septièmes. Comme on a démontré que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades¹, il est évident que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde est, lui aussi, inférieur à mille unités de nombres septièmes. Nous avons ainsi démontré que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde, tel que l'entendent la plupart des astronomes, est de mille unités de nombres septièmes ; nous allons démontrer maintenant que le nombre des grains de sable, remplissant un volume qui serait même égal à celui d'une sphère aussi grande qu'Aristarque suppose celle des étoiles fixes, est inférieur à mille myriades de nombres huitièmes. Comme on a supposé, en effet, que le rapport de la terre à ce que nous appelons communément le monde est égal au rapport de ce monde à la sphère des étoiles fixes telle que la suppose Aristarque, les diamètres de ces sphères ont entre eux le même rapport². Or il a été démontré que le diamètre du monde est inférieur à une longueur dix mille fois multiple du

1. Cf. II, début.

2. Cf. Eucl. XII, 18.

μυριάδες ἕκτος καὶ τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ $\bar{\rho}$ μυριάδες ἑβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δυοκαιπεντακοστός ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας.

- 5 Τῶν δὲ δύο καὶ πενήτηκοντα τούτων οἱ μὲν ὀκτώ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τῇ μονάδι οἷ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἐβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μονάδες τῶν ἐβδόμων
- 10 ἀριθμῶν. Φανερόν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ τῇ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων $\bar{\rho}$ ἔλασσόν ἐστιν ἢ $\bar{\alpha}$ μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἃ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσωσιν ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων $\bar{\rho}$,
- 15 δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ $\bar{\alpha}$ μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν. Ὅτι μὲν οὖν τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ $\bar{\alpha}$ μονάδες τῶν ἐβδόμων ἀριθμῶν
- 20 δέδεκται ὅτι δὲ καὶ τὸ πλήθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ σφαίρᾳ ταλικάυτᾳ, ἀλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν εἶμεν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ $\bar{\alpha}$ μυριάδες τῶν ὀγδῶν ἀριθμῶν δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον
- 25 ποτὶ τὸν ὑφ' ἀμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν, ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, καὶ αἱ διάμετροι τὰν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλας. Ἀ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τῆς διαμέτρου τῆς γᾶς δέδεκται ἐλάσσωσιν

11 τὰν EG : τῶν DH || 12 ἔλασσόν E : ἐλάσσωσιν DGH || 17 οὖν Heiberg : ὁμοίως post lac. codd. || 23 ἔλασσόν G : ἐλάσσωσιν DEH || 25 τὸν EGH : τῶν D || 28 ἔχοντι EG : ἔχωντι D : ἀλλάλας G : ἄλλαλας DEH.

diamètre de la terre¹ ; il est donc évident que le diamètre de la sphère des fixes est, lui aussi, inférieur à une longueur dix mille fois multiple du diamètre du monde. Or comme les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres, il est clair que la sphère des fixes telle que la suppose Aristarque est inférieure à un volume dix mille myriades de myriades de fois multiple du volume du monde. Mais on a démontré que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde est inférieur à mille unités de nombres septièmes ; il est dès lors évident que si une sphère, aussi grande qu'Aristarque suppose celle des étoiles fixes, était remplie de sable, le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des mille unités (sc. de nombres septièmes) par dix mille myriades de myriades. Et comme les mille unités de nombres septièmes représentent le cinquante-deuxième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et les dix mille myriades de myriades le treizième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le soixante-quatrième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle ; mais ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, qui est de mille myriades de nombres huitièmes. Il est par conséquent évident que le nombre des grains de sable remplissant une sphère de la grandeur qu'Aristarque prête à la sphère des étoiles fixes est inférieur à mille myriades de nombres huitièmes². Je conçois, roi Gélon, qu'au commun des hommes, qui n'ont pas l'expérience

1. Cf. II, début.

2. C'est-à-dire, en notation moderne, inférieur à 10^{63} , nombre qu'on écrirait en faisant suivre le chiffre 1 de 63 zéros.

- εοῦσα ἢ μυριοπλασίων · δῆλον οὖν ὅτι καὶ ἡ διάμετρος τῆς τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τῆς διαμέτρου τοῦ κόσμου. Ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τῶν
- 5 διαμέτρων, φανερόν ὅτι ἡ τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖρα, ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυρίαὶς μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. Δέδεικται δὲ ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ , $\bar{\alpha}$ μονάδες τῶν ἐξδόμων
- 10 ἀριθμῶν · δῆλον οὖν ὅτι, εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικάυτα τὸ μέγεθος, ἀλίκαν ἢ Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεῖσάν τῶν χιλιάδων μονάδων ταῖς μυριάκις
- 15 μυρίαὶς μυριάδεσιν. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἐξδόμων , $\bar{\alpha}$ μονάδες δυοκαίπεντακοστός ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαίδέκατος ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ἡ γενομένη ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἐξηκοστός ἀπὸ μονάδος ἐκ τῆς
- 20 αὐτῆς ἀναλογίας · οὗτος δὲ ἐστὶ τῶν ὀγδόων ὀγδοος, ὅς κα' εἴη χίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Φανερόν τοίνυν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλήθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ τῶν ἀπλανέων ἄστρον σφαῖρα, ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ , $\bar{\alpha}$ μυριάδες τῶν ὀγδόων
- 25 ἀριθμῶν. Ταῦτα δέ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὖπιστα

1 μυριοπλασίων Wallis : μυριοπλασίαν DH μυριοπλασία EG
 || 3 ἐπεὶ δὲ Wallis : ἐπειδὴ codd. || 4 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ||
 7 μυρίακις Heiberg : om. DEG μυριάδων H || 8 ὅτι add. Rualtus
 || 9 ἔλασσόν G : ἐλάσσων DEH || 14 πολλαπλασιασθεῖσάν G :
 πολλαπλασιαῶν DEH || μονάδων DEH : μονάδων τῶν ἐξδόμων
 ἀριθμῶν G || 15 ἐξδόμων DEH : ἐξδόμων ἀριθμῶν G || 17
 αἱ add. Wallis || 21 ὅς κα' εἴη Heiberg : καὶ πεντάκις EGH
 καὶ πέντα D || 23 τῇ add. Wallis.

des mathématiques, ces choses paraîtront peu croyables ; ceux, en revanche, qui y sont versés et qui ont réfléchi sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil, de la lune et du monde dans sa totalité les accepteront grâce à ma démonstration, et c'est pourquoi j'ai cru qu'à toi aussi il serait agréable d'en prendre connaissance.

φανήσιν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ
περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθῶν τᾶς τε γᾶς
καὶ τοῦ ἀλίου καὶ τᾶς σελήνης καὶ τοῦ ὅλου κόσμου
πεφροντικότεσσιν πιστὰ διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι·
5 διόπερ ὤήθην καὶ τὴν οὐκ ἀνάρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπι-
θεωρῆσαι ταῦτα.

5 τὴν Gomperz, Bergk : τινας codd. || εἶμεν Gomperz,
Bergk : εἴη codd. || ἔτι codd. : del. Gomperz, Bergk.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

NOTICE

Ce traité commence par l'énoncé de trois propositions relatives à la parabole, pour la démonstration desquelles Archimède renvoie le lecteur à des *Éléments des sections coniques*, c'est-à-dire, probablement, aux traités composés sur cette matière par Euclide et par Aristée¹. Le premier de ces théorèmes affirme que dans toute parabole une corde parallèle à une tangente est divisée en deux parties égales par le diamètre passant par le point de contact et que, réciproquement, si une corde est divisée en deux parties égales par un diamètre de la parabole, la corde est parallèle à la tangente menée au point d'intersection du diamètre et de la parabole ; le deuxième, que le point de rencontre E entre une tangente menée à une parabole en un point Γ et un diamètre de la parabole est symétrique, par rapport au point B où le diamètre coupe la parabole, du point d'intersection Δ du diamètre avec la corde $A\Gamma$ menée par le point Γ parallèlement à la tangente en B. Le troisième énoncé rappelle que les carrés des segments EZ et $A\Delta$ interceptés par une parabole et un diamètre sur deux droites parallèles à la tangente menée par le point d'intersection B du diamètre avec la parabole sont entre eux comme les distances à B

1. Géomètre grec, contemporain d'Euclide, qui publia, dix ans avant la parution du *Traité des coniques* d'Euclide, un ouvrage en cinq livres sur les sections coniques sous le titre *Lieux solides*. Ce traité existait encore à l'époque de Pappus, alors que celui d'Euclide était déjà perdu à ce moment.

des points d'intersection des deux parallèles avec le diamètre. Si le diamètre est l'axe de la parabole, ceci revient à dire, en terminologie cartésienne, que les carrés sur les abscisses de deux points d'une parabole $y = ax^2$ sont entre eux comme leurs ordonnées. Ces trois propositions figureront, après Archimède, dans le traité *Des coniques* d'Apollonios, I, 46 ; I, 25 et I, 20. Deux autres propriétés de la parabole qu'Archimède fera intervenir dans ses raisonnements font l'objet des démonstrations des propositions 4 et 5.

La quadrature de la parabole, c'est-à-dire la démonstration du théorème d'après lequel tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur — la hauteur s'entendant comme la longueur de la perpendiculaire abaissée, sur la base, du point de contact de la tangente menée à la parabole parallèlement à la base — nous est présentée dans ce traité au moyen de deux méthodes différentes dont l'emploi successif reflète d'une manière particulièrement nette la manière dont une vérité mathématique se faisait jour dans l'esprit d'Archimède. A l'origine d'une découverte mathématique de ce genre se situe chez lui l'intuition d'une relation simple entre une aire limitée en partie par une figure curviligne définie d'une manière exacte, comme la parabole, et une figure rectiligne inscrite ayant certains éléments communs avec le segment de figure curviligne à évaluer. Cette intuition est vérifiée, en second lieu, par la pesée des figures comparées, réalisées matériellement sur des plaques minces homogènes. La pesée expérimentale est analysée théoriquement, dans une troisième phase de l'investigation, par l'application de la statique du levier, telle qu'Archimède la décrit dans son traité *De l'équilibre des figures planes*, aux tranches obtenues par la décomposition des deux figures. Cette méthode des tranches indivisibles manquant de rigueur logique, l'enquête est couronnée par une démonstration exacte au moyen de la méthode généralisée d'Eudoxe. Il est probable que la pensée d'Archimède a suivi un

chemin semblable, par quatre étapes, même là où, comme dans le traité *De la sphère et du cylindre*, les résultats de l'enquête sont présentés comme acquis par le seul raisonnement géométrique, c'est-à-dire même là où Archimède ne nous fait assister qu'à la partie finale de son ascension vers la certitude mathématique. Ici, dans le traité *De la quadrature de la parabole*, la quadrature du segment de parabole est faite successivement par le procédé statique, dans les propositions 6-17, et par la méthode géométrique, dans les propositions 18-24.

La découverte qui fait l'objet de ce traité représente la première quadrature exacte d'une aire partiellement curviligne dans l'histoire des mathématiques. Plusieurs géomètres avant Euclide s'étaient vainement attaqués au fameux problème de la quadrature du cercle qui hantera les esprits pendant toute l'antiquité. Sans nommer de noms, Archimède fait allusion, dans la préface de ce traité à l'adresse de Dosithée, aux travaux de ces chercheurs, parmi lesquels il faut compter Anaxagore, Antiphon et Bryson. Il considérait sa rectification du périmètre du cercle et la détermination correspondante d'une aire équivalente au cercle comme des approximations *provisoires*. La raison pour laquelle la quadrature devait réussir dans le cas de la parabole et échouer dans celui du cercle lui échappait. Elle ne sera découverte qu'en 1882, quand Lindemann¹ arrivera à démontrer, avec la transcendance du nombre π , l'impossibilité d'une solution pour ce problème millénaire.

Le texte du traité *La quadrature de la parabole* est établi d'après les manuscrits \mathcal{L} , D, E, G, H.

1. F. Lindemann, 1852-1939, réussit en 1882 à démontrer que le rapport π du périmètre d'un cercle à son diamètre est un nombre transcendant, c'est-à-dire un nombre qui ne peut être la racine d'une équation algébrique.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède à Dosithée, prospérité !

Quand j'appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné ou à celle d'un segment de cercle donné¹, après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône entier² et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun

1. Allusion aux tentatives de quadrature du cercle par Antiphon, Bryson, Hippias (au moyen de la « quadratrice ») et Hippocrate de Chios (au moyen des « lunules »). Avant Archimède, les procédés d'Antiphon et de Bryson ont été jugés sévèrement par Aristote, *Soph. El.* 171 b 12-18 ; 171 b 34-172 a 7 ; *Phys.* 185 a 14-17 ; et *passim*. Nous devons la connaissance d'une partie de ces travaux aux pages que leur ■ consacrées Eudème et que Simplicius cite dans son Commentaire à la *Physique* d'Aristote ; cf. *Simpl. Phys.*, éd. Diels, p. 60-68.

2. Le mot « entier », ὅλου, n'a pas de sens ; il est probable que le texte a été altéré ici par un copiste.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Τετραγωνισμός παραβολῆς

Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πράττειν.

- Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἀμῖν ἐν φιλία, τὴν δὲ Κόνωνος γνῶριμον
5 γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετε-
λευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν ὥς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς
γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος,
ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαί τοι γράψαντες, ὥς Κόνωνι
γράφειν ἐγνώκοτες ἡμεῖς, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ
10 πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἀμῶν
τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὐρεθέν, ἔπειτα
δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. Τῶν μὲν οὖν
πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν
τινες γράφειν ὥς δυνατόν ἐὼν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ
15 κύκλου τμᾶματι τῷ δοθέντι χωρίον εὐρεῖν εὐθύγραμμον
ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τῆς
ὀλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο
λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς
ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὕρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθην.
20 Τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα

3-4 οὐδὲν ἐπιλείπων Heiberg : ἔτι λείπων DEGH om. ζ ||
4 τὴν Heiberg : τινὰ codd. || 6 καὶ DEGH : om. ζ || 8 τοι add.
Torellius || 9 ἐγνώκοτες ἡμεῖς Heiberg : ἐγνώκοτες ἡμεῖς H
ἐγνώκοτες εἶμεν DEG consueueramus ζ || 10 ἀμῶν Heiberg :
ἡμῶν DEGH aliis ζ || 12 καὶ DEGH : om. ζ || ἐπιδειχθέν.
Τῶν DEGH : demonstratis ζ || οὖν add. Heiberg || 14 ἐὼν
DEGH : erat ζ || 16 ταῦτα DEGH : hoc ζ || 18 διόπερ Torellius :
ὅπερ DEGH quae quidem ζ || 20 δὲ ὑπ' εὐθείας Torellius : om.
DEGH autem (contentam) a ζ || τε add. Heiberg || καὶ DEGH :
om. ζ.

des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant ; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant pour la démonstration le lemme¹ que voici : l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme ; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que les cercles ont entre eux le rapport des carrés sur leurs diamètres² et que les sphères ont entre elles le rapport des cubes sur leurs diamètres³, et ils ont démontré que toute pyramide est équivalente au tiers du prisme⁴ ayant même base et même hauteur que la pyramide, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône⁵, en prenant un lemme semblable⁶ à celui que nous venons d'indiquer. Il se trouve cependant que tous ces théorèmes cités sont considérés comme non moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme ; il me suffit d'avoir amené au même degré de certitude ceux que je publie maintenant. Je t'envoie donc les démonstrations que j'ai rédigées pour le théorème (sc. indiqué), en montrant d'abord comment je l'ai examiné par la mécanique, ensuite aussi comment je l'ai prouvé par la géométrie. Je ferai précéder, de plus, mes démonstrations de propositions élémentaires sur les coniques utiles pour la démonstration. Sois en bonne santé.

1. Cf. Eucl. V, déf. 4 ; Archim., *Des Spirales*, fin de la lettre à Dosithée.

2. Cf. Eucl. XII, 2.

3. Cf. Eucl. XII, 18.

4. Cf. Eucl. XII, 7.

5. Cf. Eucl. XII, 10.

6. Cf. Eucl. X, 1.

- περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετρα-
 γωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὔρηται · δείκνυται
 γὰρ ὅτι πᾶν τμάμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογω-
 νίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν
 5 ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου
 τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ · τῶν ἀνίσων
 χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ἥ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος,
 δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμένην παντὸς ὑπερέχειν
 τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. Κέχρηται δὲ
 10 καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι · τοὺς τε γὰρ
 κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τὰν
 διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρώ-
 μενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι
 ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς
 15 τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν
 ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον · καὶ διότι πᾶς κώνος
 τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν
 ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοίον τῷ προειρη-
 μένῳ λήμματι τι λαμβάνοντες ἔγραφον. Συμβαίνει δὲ τῶν
 20 προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἥσσον τῶν
 ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι ·
 ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν
 ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς
 ἀποδείξεις ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν μηχαν-
 25 νικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν
 γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. Προγράφεται δὲ καὶ
 στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. Ἐρρωσο.

1 προτέρων Heiberg : πρώτων codd. || 8 ἑαυτᾷ add. Heiberg ||
 12 αὐτῷ τούτῳ Heiberg : αὐτῷ DEGH hoc 𐤀 || 14 ὅτι add.
 Heiberg || πυραμὶς GH : μυραμὶς DE || 18 ὁμοίον Heiberg :
 ὁμοίως codd. || 19 λήμματι τι Heiberg : λήμματι codd. || δὲ add.
 Torellius || 21 τοῦ λήμματος DEGH : om. 𐤀 || 22 ἀρκεῖ Heiberg :
 ἄρτι DEGH sufficit 𐤀 || τούτοις Heiberg : τούτου codd. ||
 ἀναγμένων Heiberg : ἀναγομένων G ἀναγμένον DEH𐤀.

1.

Si on a une parabole $AB\Gamma$, une droite $B\Delta$ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, et une droite $A\Gamma$ menée parallèlement à la tangente à la conique au

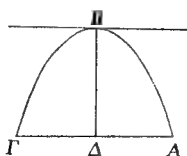


Fig. 59

point B, $A\Delta$ sera égal à $\Delta\Gamma$; et si $A\Delta$ est égal à $\Delta\Gamma$, la droite $A\Gamma$ et la tangente à la conique au point B seront parallèles¹.

2.

Si on a une parabole $AB\Gamma$, une droite $B\Delta$ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, une droite $A\Delta\Gamma$

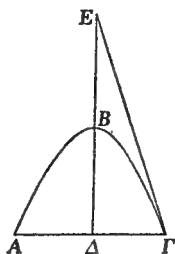


Fig. 60

1. Cf. Apollonius I, 46.

α'.

Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἧς ἡ $AB\Gamma$, ἡ δὲ BD παρὰ τὴν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ $A\Gamma$ παρὰ τὴν κατὰ τὸ B ἐπιψαύουσαν τῆς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα

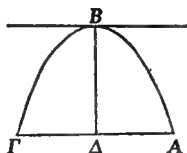


Fig. 59

5 ἔσσειται ἡ AD τῇ $\Delta\Gamma$ · κἂν ἴσα ἢ ἡ AD τῇ $\Delta\Gamma$, παράλληλοι ἔσσονται αἱ τε $A\Gamma$ καὶ ἡ κατὰ τὸ B ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ κώνου τομᾶς.

β'.

Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομά ἡ $AB\Gamma$, ἡ δὲ ἡ μὲν BD παρὰ τὴν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ $AD\Gamma$

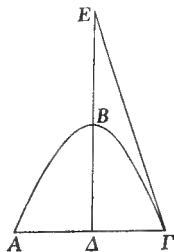


Fig. 60

2 ἡ δὲ Heiberg : ἡ δὲ codd. || 3 ἡ δὲ Heiberg : ἡ δὲ codd. ||
5 τῇ $\Delta\Gamma$ alt. mss. $G\mathcal{L}$: om. DEH || 6 αἱ τε $G\mathcal{L}$: αἱ τε DEH ||
ἐπιψαύουσα $G\mathcal{L}$: ἐπιψαύουσαι DEH .

parallèle à la tangente à la conique au point B, et une droite $E\Gamma$ tangente à la conique au point Γ , $B\Delta$ et BE seront égaux¹.

3.

Si on a une parabole $AB\Gamma$ et une droite $B\Delta$ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, et si on mène les droites $A\Delta$ et EZ parallèlement à la tangente à la

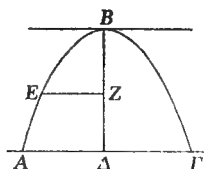


Fig. 61

conique au point B, le rapport de $B\Delta$ à BZ sera égal au rapport du carré sur $A\Delta$ au carré sur EZ ².

Ces propriétés ont été démontrées dans les *Éléments*³ relatifs aux coniques.

4.

Soit $AB\Gamma$ un segment compris entre une droite et une parabole ; que du milieu de $A\Gamma$ une droite $B\Delta$ soit menée parallèlement au diamètre ou qu'elle soit elle-même un diamètre ; joignons B à Γ et prolongeons $B\Gamma$. Si on mène une autre droite $Z\Theta$ parallèlement

1. Cf. Apoll. I, 35.

2. Cf. Apoll. I, 20.

3. C'est-à-dire dans les traités, perdus, consacrés par Aristée et par Euclide aux sections coniques.

παρὰ τὰν κατὰ τὸ \square ἐπιψάουσας τὰς τοῦ κώνου τομᾶς, ἃ δὲ $ΕΓ$ τὰς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψάουσα κατὰ τὸ Γ , ἑσσοῦνται αἱ $ΒΔ$, $ΒΕ$ ἴσαι.

γ'.

- 5 Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἃ $ΑΒΓ$, ἃ δὲ $ΒΔ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ $ΑΔ$, $ΕΖ$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ $Β$ ἐπιψάουσας τὰς

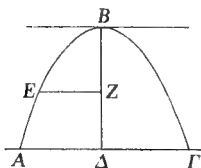


Fig. 61

τοῦ κώνου τομᾶς, ἑσσεῖται, ὥς ἃ $ΒΔ$ ποτὶ τὰν $ΒΖ$, δυνάμει ἃ $ΑΔ$ ποτὶ τὰν $ΕΖ$.

- 10 Ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ'.

- Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ $ΑΒΓ$, ἃ δὲ $ΒΔ$ ἀπὸ μέσας τὰς $ΑΓ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθῳ ἡ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἃ $ΒΓ$ 15 εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. Εἰ δὴ κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἃ $ΖΘ$ παρὰ τὰν $ΒΔ$ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν $Β$, Γ εὐθείαν,

5 ἡ $DEG\zeta$: om. H ἡ ὀρθογωνίου $GH\zeta$: ὀρθογώνιον DE ἡ ἃ δὲ Torellius : ἡ δὲ DGH ἡ δὲ $E\zeta$ ἡ 6 αὐτὰ ζ : αὐτὰ ἃ G αὐτὰ $\tau\tilde{\alpha}$ DEH ἡ διάμετρος GB : διαμέτρῳ DEH ἡ ἀχθέωντί Heiberg : ἀχθῶσι E ἄχθωσαν DGH ἡ 7 παρὰ τὰν κατὰ τὸ B ms. ζ : om. $DEGH$ ἡ ἐπιψάουσας $DEH\zeta$: ἐπιψάουσας G ἡ 8 BZ mss. DEH : BZ μάκει G , bz ita ζ ἡ 10 δὲ ζ : δὴ $DEGH$ ἡ 13 τὸ $DEGH$: om. ζ ἡ 15 κα ἀχθῇ Heiberg : καταχθεῖ $DEGH$ producat ζ ἡ 16 B ms. ζ : A mss. $DEGH$.

à $B\Delta$, coupant la droite $B\Gamma$, le rapport de $Z\Theta$ à ΘH sera égal au rapport de ΔA à ΔZ .

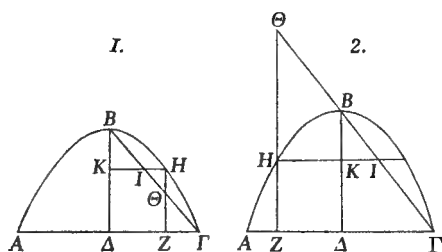


Fig. 62

Menons, en effet, par le point H la parallèle à $A\Gamma$, soit KH ; le rapport du carré sur $\Delta\Gamma$ au carré sur KH est ainsi égal au rapport de la longueur $B\Delta$ à la longueur BK ; car cette propriété a été démontrée¹. Il s'ensuit que le carré sur $B\Gamma$ sera au carré sur $B\Theta$ comme la longueur $B\Gamma$ est à la longueur $B\Delta$, puisque ΔZ et KH sont égaux². Les segments de droite $B\Gamma$, $B\Theta$ et $B\Delta$ sont donc proportionnels³, de façon que le rapport de $B\Gamma$ à $B\Theta$ est égal⁴ au rapport de $\Gamma\Theta$ à $\Theta\Delta$. Par conséquent, ΘZ est à ΘH comme $\Gamma\Delta$ est à ΔZ ; mais $\Delta\Gamma$ est égal à ΔA ; il est donc évident que le rapport de ΔA à ΔZ est égal au rapport de $Z\Theta$ à ΘH .

5.

Soit $AB\Gamma$ un segment compris entre une droite et une parabole ; par le point A menons la parallèle ZA au diamètre, et par le point Γ la droite ΓZ , tangente à la parabole au point Γ . Dès lors, si on mène dans le triangle $ZA\Gamma$ une parallèle à AZ , le rapport dans

1. Sc. par les géomètres antérieurs.

2. Cf. Eucl. VI, 2.

3. Cf. Eucl. V, déf. 9.

4. Cf. Eucl. V, 16, 18.

τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἃ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ, ὃν ἃ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ.

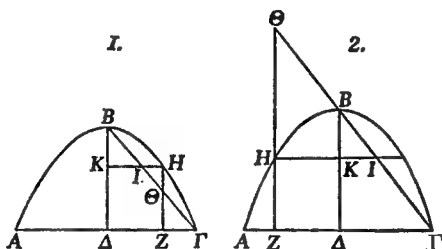


Fig. 62

Ἀχθω γὰρ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰν ΑΓ ἃ ΚΗ · ἔστιν ἄρα
ὡς ἃ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΚ μάκει, οὕτως ἃ ΔΓ ποτὶ τὰν ΚΗ
5 δυνάμει · ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἃ
ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΙ μάκει, οὕτως ἃ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ δυνάμει ·
ἴσαι γὰρ αἱ ΔΖ, ΚΗ · ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ
γραμμαί. Ὡστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ ΒΓ ποτὶ τὰν
ΒΘ, ὃν ἃ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΙ · ἔστιν ἄρα ὡς ἃ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΖ,
10 οὕτως ἃ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ. Τῷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἃ ΔΑ ·
δηλὸν οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ,
ὃν ἃ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ.

ε'.

Ἐστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου
15 κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν
διάμετρον ἃ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψάουσα τὰς τοῦ κώνου
τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἃ ΓΖ. Εἰ δὴ τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ

3 H ms. χ : I mss. DEGH \parallel KH mss. DEH : KI ms. G, hk ms. χ \parallel 4 KH Basil. : KI codd. \parallel 6 ποτὶ alt. — 7 ΒΓ ms. χ : om. DEGH \parallel 9-10 ΔΖ, οὕτως ἃ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ ms. χ : ΘΗ seq. lacuna DEGH.

παρὰ τὰν AZ , τὸν αὐτὸν λόγον ἃ ἀχθεῖσα τετμήσεται
 ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἃ AG ὑπὸ
 τῆς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμήμα
 τῆς AG τὸ ποτὶ τῷ A τῷ τμήματι τῆς ἀχθείσας τῷ ποτὶ
 5 τῷ A .

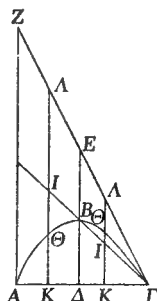


Fig. 63

Ἄχθω γάρ τις ἃ DE παρὰ τὰν AZ , καὶ τεμνέτω πρῶτον
 ἃ DE τὰν AG δίχα. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὀρθογωνίου κώνου
 τομὰ ἃ ABG καὶ ἀγμένα ἃ BD παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ
 δὲ AD , DG ἴσαι, ἐσσεῖται τῇ AG παράλληλος ἃ κατὰ τὸ
 10 B ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Πάλιν,
 ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἃ DE , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἃ
 GE ἄκται ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς
 κατὰ τὸ Γ , ἃ δὲ DG παράλληλος τῇ κατὰ τὸ B ἐπιψαυούσα,
 ἴσα ἐστὶν ἃ EB τῇ BD ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ AD
 15 ποτὶ τὰν DG , ὃν ἃ DB ποτὶ τὰν BE . Εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει
 ἃ ἀχθεῖσα τὰν AG , δέδεικται ὅτι εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἃ
 KL παρὰ τὰν AZ δεικτέον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον
 ἃ AK ποτὶ τὰν KG , ὃν ἃ $K\Theta$ ποτὶ τὰν $\Theta\Lambda$. Ἐπεὶ γὰρ

3 ἀνάλογον $DEGH$: om. \mathcal{L} del. Basil., Torellius, Heiberg ||
 4 τὸ ποτὶ τῷ Heiberg : ποτὶ τὸ codd. || 5 τῷ Heiberg : τὰ
 $DEGH$ τὸ \mathcal{L} || 6 παρὰ \mathcal{L} : ποτὶ $DEGH$ || 18 τὰν pr. EG : τὸν
 DH .

en effet, BE est égal à $B\Delta$, le segment de droite IA est aussi égal à KI . Le rapport de AK à KI est donc égal au rapport de $A\Gamma$ à ΔA , et, d'autre part, le rapport de KI à $K\Theta$ est égal au rapport de ΔA à AK , car cette propriété a été démontrée antérieurement¹. Par conséquent, le rapport de $K\Theta$ à $\Theta\Lambda$ est égal² au rapport de AK à $K\Lambda$; la proposition est donc démontrée.

6.

Imaginons que le plan placé devant nous (sc. dans lequel nous opérons) soit perpendiculaire à l'horizon, et que ce qui est situé du côté d'une droite AB où se trouve le point Δ soit au-dessous, que, en revanche, ce qui est situé de l'autre côté de la droite soit au-dessus. Soit le triangle rectangle $B\Delta\Gamma$ ayant l'angle droit en B et le côté $B\Gamma$ égal à la moitié du levier, les segments AB et $B\Gamma$ étant égaux. Que ce triangle soit suspendu aux points B et Γ , qu'une autre aire Z soit suspendue à l'autre partie du levier, au point A , et que l'aire Z , suspendue en A , fasse équilibre au triangle $B\Delta\Gamma$ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Z est la troisième partie du triangle $B\Delta\Gamma$.

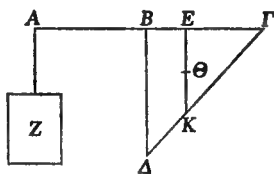


Fig. 64

1. Cf. prop. 4 et Eucl. V, 19, coroll.

2. Cf. Eucl. V, 17; 22 et V, 7, coroll.

- ἴσα ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΒΔ$, ἴσα ἐστὶ καὶ ἡ $ΙΛ$ τῇ $ΚΙ$ · τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἡ $ΛΚ$ ποτὶ τὰν $ΚΙ$, ὃν ἡ $ΑΓ$ ποτὶ τὰν $ΔΑ$. Ἐχει δὲ καὶ ἡ $ΚΙ$ ποτὶ τὰν $ΚΘ$ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ $ΔΑ$ ποτὶ τὰν $ΑΚ$ · δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον ·
- 5 ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ $ΚΘ$ ποτὶ τὰν $ΘΛ$, ὃν ἡ $ΑΚ$ ποτὶ τὰν $ΚΓ$. Δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ς'.

- Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ] προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὀρίζοντα, καὶ τῆς
- 10 $ΑΒ$ γραμμῆς [ἐπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ $Δ$ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ $ΒΔΓ$ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ $Β$ γωνίαν καὶ τὰν $ΒΓ$ πλευρὰν ἴσαν τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τῆς $ΑΒ$ τῇ $ΒΓ$], κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν
- 15 $Β$, $Γ$ σημείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ $Ζ$ ἐκ τοῦ ἐτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ $Α$, καὶ ἰσορροπείτω τὸ $Ζ$ χωρίον κατὰ τὸ $Α$ κρεμάμενον τῷ $ΒΔΓ$ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. Φαμὶ δὴ τὸ $Ζ$ χωρίον τοῦ $ΒΔΓ$ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

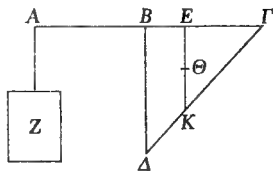


Fig. 64

2 ἡ $ΛΚ$ ms. $ζ$: om. $DEGH$ || 5 ὥστε $ζ$: ὡς $DEGH$ || 8 τὸ pr. — 9 ὁρώμενον $DEGH$: propositum $ζ$ || 9 ἐπίπεδον ὀρθὸν Heiberg : ἐπὶ ὀρθοῦ codd. || 10 ἐπειτα $DEGH$: om. $ζ$ || τὰ $DEGH$: hoc $ζ$ || 10-11 κάτω νοείσθω G : κατανοείσθω codd. || 11 τὰ $DEGH$: hoc $ζ$ || 12 τῷ Heiberg : τὰ $DEGH$ || 18 ἔχοντι Torellius : ἔοντι codd.

Puisque, en effet, le levier est supposé être en équilibre, la ligne AF sera parallèle à l'horizon, et les perpendiculaires menées à AF dans le plan perpendiculaire à l'horizon seront perpendiculaires au plan de l'horizon. Coupons le segment de droite BF au point E de manière que FE soit le double de EB , menons la parallèle KE à ΔB , et divisons KE en deux parties égales par le point Θ . Dans le triangle $B\Delta F$, le centre de gravité sera ainsi le point Θ ; car cette propriété a été démontrée dans le *Traité de mécanique*¹. Si donc la suspension du triangle $B\Delta F$ aux points B et F est supprimée, et si le triangle est suspendu en E , il restera dans sa position actuelle, puisque tout corps, suspendu en quelque point que ce soit, garde une position telle que le point de suspension et le centre de gravité du corps suspendu soient sur la même perpendiculaire (sc. sur la même verticale) ; car cette proposition a été démontrée elle aussi². Puisque, donc, le triangle $B\Delta F$ aura gardé la même position par rapport au levier, l'aire Z continuera à lui faire équilibre. Mais comme l'aire Z , suspendue au point A , et le triangle $B\Delta F$, suspendu au point E , s'équilibrent, il est évident qu'ils sont inversement proportionnels aux distances³, et que le segment de droite AB est à BE comme le triangle $B\Delta F$ est à l'aire Z ; mais AB est triple de BE ; le triangle $B\Delta F$ est donc lui aussi triple de l'aire Z .

Mais il est évident aussi que (sc. réciproquement) si le triangle $B\Delta F$ est triple de l'aire Z , les deux figures s'équilibreront.

7.

Que AF soit de nouveau un levier ; soit B son milieu et qu'il soit suspendu par ce point B . Soit $\Gamma\Delta H$ un

1. Cf. *De l'équilibre des figures planes* I, 14.

2. Sans doute dans un des ouvrages perdus d'Archimède, consacré à l'étude des centres de gravité.

3. Cf. *De l'équil. des fig. pl.* I, 6 et 7.

- Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη καὶ ἡ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὀρίζοντα, αἱ δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τῇ ΑΓ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὀρίζοντα κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὀρίζοντα. Τετμάσθω ἡ ΒΓ γραμμὰ
- 5 κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τῆς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἡ ΚΕ καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ · τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον · δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς · Εἴ καὶ οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἡ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ
- 10 δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον ὡς νῦν ἔχει · ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σαμείου καὶ κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κρεμαμένου · δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. Ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἔξει κατάστασιν
- 15 τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δῆλον ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. Τριπλασία δὲ ἡ ΑΒ
- 20 τῆς ΒΕ · καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Ζ χωρίου.

Φανερόν δὲ [ὅτι] καί, εἴ καὶ τριπλάσιον ᾗ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ'.

- 25 Ἔστω πάλιν ζυγός ἡ ΑΓ γραμμὰ, μέσον δὲ αὐτῆς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον],

1 εἴη καὶ Heiberg : εἴη καὶ DEGH assimilatur ζ' || 2 παρὰ τὸν ὀρίζοντα, αἱ Torellius : αὐτὸν ὀρίζονται DEGH ipsi orizonti ζ' || 3 κάθετοι ζ' : καθέτοις DEGH || 9 ἡ Torellius : ὁ DEGH || λυθῇ Heiberg : λυθείη DEGH || 11 καὶ κατασταθῇ Heiberg : κατασταθὲν DEGH statutum est ζ' || 14 γὰρ DEGH : οὖν ζ' || 16 ἰσορροπέοντι Ε : ἰσορροπέωντι DGH || 22 ὅτι codd. : del. Heiberg || 26 τὸ ΓΔΗ τρίγωνον codd. : del. Heiberg.

triangle obtusangle ayant pour base le segment de droite ΔH et une hauteur égale à la moitié du levier ; que le triangle $\Delta \Gamma H$ soit suspendu aux points B et Γ , et que l'aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle $\Gamma \Delta H$ dans sa position actuelle. Nous démontrerons de la même manière que l'aire Z est équivalente à la troisième partie du triangle $\Gamma \Delta H$.

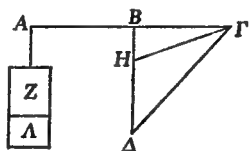


Fig. 65

Qu'une autre aire encore, en effet, qui soit la troisième partie du triangle $B\Gamma H$, soit suspendue au point A. Le triangle $B\Delta\Gamma$ fera, dès lors, équilibre¹ à la somme des aires Z et Λ . Dès lors, comme le triangle $B\Gamma H$ fait équilibre à l'aire Λ , que le triangle $B\Gamma\Delta$ fait équilibre à l'aire qui est la somme de Z et de Λ , et que, enfin, cette somme de Z et de Λ est équivalente au tiers² du triangle $B\Gamma\Delta$, il est évident que le triangle $\Gamma\Delta H$ est le triple de l'aire Z.

8.

Soit le levier $AB\Gamma$, B son milieu ; qu'il soit suspendu en B ; soit $\Gamma\Delta E$ un triangle rectangle ayant l'angle droit en E ; qu'il soit suspendu au levier aux points Γ et E ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au triangle $\Gamma\Delta E$ dans sa position actuelle ; que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du

1. Du moment que, par hypothèse, Z et $\Gamma\Delta H$ se font équilibre, et qu'il y a équilibre entre Λ et $B\Gamma H$ (cf. prop. 6), on conclut : $B\Delta\Gamma = 3(Z + \Lambda)$.

2. Puisque $\Lambda = \frac{1}{3} B\Gamma H$.

τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω
 5 τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.

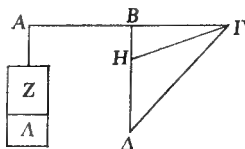


Fig. 65

Κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὼν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΔΓ
 10 τρίγωνον τῷ ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερόν ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ.

η'.

Ἐστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω
 15 κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον

5 τῷ ΓΗ : τὸ ΔΕ || 6 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 8 τι ΔΕ : τοι ΓΗ || 9 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 11 Λ ms. : Α mss. ΔΕΓΗ || καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ mss. ΔΕΓΗ : om. : ΖΛ alt. ms. Γ : ΖΑ mss. ΔΕΗ || 14 ΑΒΓ ms. : ΑΒ mss. ΔΕΓΗ || κρεμάσθω ΓΗ : κρεμάσθω ΔΕ || 15 δὲ add. Heiberg || 16 τῷ Heiberg : τὰν ΔΕΓΗ.

triangle $\Gamma\Delta E$ à l'aire K. Je dis que l'aire Z est inférieure au triangle $\Gamma\Delta E$, et supérieure à l'aire K.

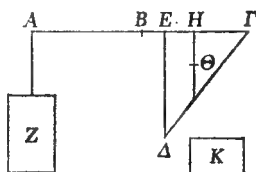


Fig. 66

Prenons le centre de gravité du triangle $\Delta E\Gamma$, soit Θ ; menons la parallèle ΘH à ΔE . Du moment donc que le triangle $\Gamma\Delta E$ fait équilibre à l'aire Z, le rapport de l'aire $\Gamma\Delta E$ à l'aire Z est égal¹ au rapport de AB à BH, d'où il suit que l'aire Z est inférieure à l'aire $\Gamma\Delta E$. Et comme le triangle $\Gamma\Delta E$ est à l'aire Z comme BA est à BH, et à l'aire K comme BA est à BE, il est évident que le rapport du triangle $\Gamma\Delta E$ à l'aire K est supérieur au rapport de $\Gamma\Delta E$ à l'aire Z ; par conséquent, l'aire Z est supérieure² à l'aire K.

9.

Soit de nouveau le levier $A\Gamma$, et B son milieu ; soit $\Gamma\Delta K$ un triangle obtusangle ayant pour base ΔK et pour hauteur $E\Gamma$; que ce triangle soit suspendu

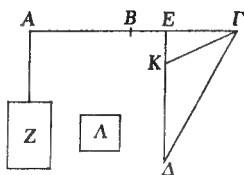


Fig. 67

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.

2. Cf. *Eucl.* V, 10.

ποτὶ τὸ Κ χωρίον. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ
 τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μείζον.

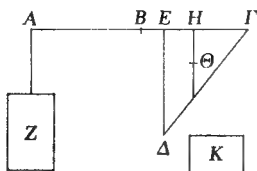


Fig. 66

Λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ
 βάρους καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἡ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ.
 5 Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν
 αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἡ ΑΒ ποτὶ
 τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ
 ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν
 ἡ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ ὃν ἡ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ,
 10 δὴλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ
 Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μείζον ἐστι τὸ Ζ τοῦ Κ.

θ'.

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β,
 τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν
 15 ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ

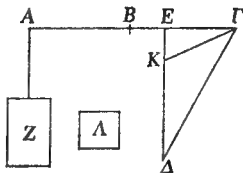


Fig. 67

8 ἔχει \angle : ἔχον DEGH || 15 κρεμάσθω Basil. : κεκρεμάσθω
 DEGH.

au levier aux points Γ et E ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au triangle $\Delta\Gamma K$ dans sa position actuelle, et que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du triangle $\Gamma\Delta K$ à l'aire Λ . Je dis que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ et inférieure à l'aire du triangle $\Delta\Gamma K$.

Même démonstration que pour la proposition précédente.

10.

Soit de nouveau le levier $AB\Gamma$, et B son milieu ; soit le trapèze $B\Delta HK$ ayant les angles aux sommets B et H droits, et le côté $K\Delta$ orienté vers le point Γ ; que le rapport du trapèze $B\Delta KH$ à l'aire Λ soit égal au rapport de AB à BH ; que le trapèze $B\Delta HK$ soit suspendu au levier aux points B et H ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze $B\Delta KH$ dans sa position actuelle. Je dis que l'aire Z est inférieure à l'aire Λ .

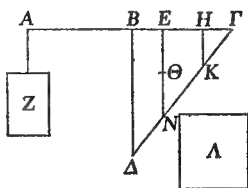


Fig. 68

Que le segment de droite $A\Gamma$ soit en effet coupé au point E de manière que le rapport de EH à BE soit égal¹ au rapport de la somme du double de ΔB et de KH à la somme du double de KH et de $B\Delta$; que

1. Cf. Eucl. VI, 10.

- τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορρο-
 πείτω τῷ ΔΓΚ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ
 λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΓΔΚ
 τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ. Φαμί δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον εἶμεν,
 5 τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον.

Δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι'.

- Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β,
 τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις
 10 γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν,
 καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ
 ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ
 τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεῖα, κρεμάσθω
 δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΒΔΚΗ
 15 τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμί τὸ Ζ
 χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Λ.

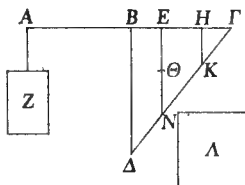


Fig. 68

Τετμάσθω γὰρ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως ὥστε, ὃν ἔχει
 λόγον ἡ διπλασία τῆς ΔΒ καὶ ἡ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν
 τῆς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχειν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ,

1 κρεμάσθω Basil. : κεκρεμάσθω DEGH || 2 ΔΓΚ ms. ζ : ΔΕΚ mss. DEGH || 12 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH || 13 τὰ Β, Η σαμεῖα ζ : τῶν Β, Η σαμείων DEGH || κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH || 19 τὰν pr. Heiberg : τῆς codd. || ἔχειν ζ : ὃν ἔχει DEGH.

le segment EN de la droite menée par E parallèlement à $B\Delta$ soit divisé en deux parties égales par le point Θ ; dans le trapèze $B\Delta HK$, le centre de gravité est alors le point Θ , car cette propriété a été démontrée dans le *Traité de mécanique*¹. Si donc le trapèze $B\Delta HK$ est détaché des points B et H et suspendu au point E , il garde la même position, pour les mêmes raisons que dans ce qui précède, et fait équilibre à l'aire Z . Du moment donc que le trapèze $B\Delta HK$, suspendu en E , fait équilibre à l'aire Z , suspendue en A , le trapèze $B\Delta HK$ sera à l'aire Z comme² AB est à BE . Le rapport du trapèze $B\Delta HK$ à l'aire Z sera donc supérieur à son rapport à l'aire Λ , puisque le rapport de AB à BE est, lui aussi, supérieur³ au rapport de AB à BH . Par conséquent, l'aire Z sera inférieure à l'aire Λ .

11.

Soit de nouveau le levier $A\Gamma$ et B son milieu ; soit $K\Delta TP$ un trapèze ayant les côtés $K\Delta$ et TP orientés vers le point Γ , et les côtés ΔP et KT perpendiculaires à $B\Gamma$; que la droite ΔP passe par B ; que le rapport

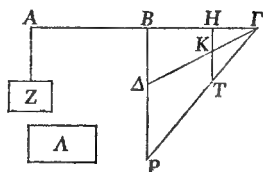


Fig. 69

de AB à BH soit égal au rapport du trapèze ΔKTP à l'aire Λ ; que le trapèze ΔKTP soit suspendu au

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 15.

2. Cf. *ibid.* I, 6 et 7.

3. Cf. *Eucl.* V, 8.

levier aux points B et H, que l'aire Z y soit suspendue au point A, et que l'aire Z fasse équilibre au trapèze ΔKPT dans sa position actuelle. On démontrerait comme dans les propositions précédentes que l'aire Z est inférieure à l'aire Λ .

12.

Soit de nouveau le levier $A\Gamma$, et B son milieu ; soit ΔEKH un trapèze ayant les angles de sommets E et H droits, et les côtés $K\Delta$ et EH orientés vers le point Γ ; que le rapport de AB à BH soit égal au rapport du trapèze ΔKEH à l'aire M, et que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du trapèze ΔKEH à l'aire Λ ; que le trapèze ΔKEH soit suspendu au levier aux points E et H, que l'aire Z y soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze dans sa position actuelle. Je dis que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ et inférieure à l'aire M.

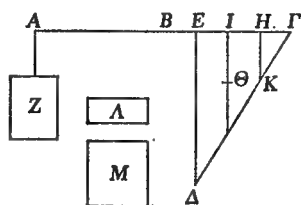


Fig. 70

J'ai pris, en effet, le centre de gravité du trapèze ΔKEH , soit Θ ; ce centre est pris de la même manière que dans la proposition précédente ; je mène la parallèle ΘI à ΔE . Si, dès lors, le trapèze est suspendu au levier au point I et détaché des points E et H, il restera

Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. Ὅμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ.

ιβ'.

- 5 Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νεουούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ,
- 10 ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον τὸν λόγον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν
- 15 Λ μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

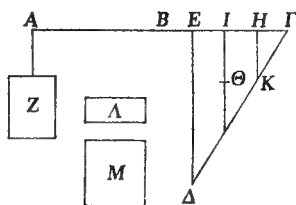


Fig. 70

Ἐλαβον γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπέζιου τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἔστω δὲ τὸ Θ · λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον · καὶ ἄγω τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. Ἄν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ,

1 τὸ alt. Z mss. EGZ : τῷ Z mss. DH || 7 σαμείοις DEGH : om. Z || 11 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH || 13 κρεμάσθω Heiberg : ἐκκρεμάσθω DEGH || 19 κρεμασθῇ Heiberg : κρεμασθήσεται DEGH.

dans la même position et fera équilibre à l'aire Z pour les mêmes raisons que dans les propositions précédentes¹. Mais du moment que le trapèze, suspendu au point I, fait équilibre à l'aire Z suspendue au point A, le rapport du trapèze à l'aire Z sera égal au rapport de AB à BI ; il est donc évident que le rapport de ΔKEH à l'aire Λ est supérieur² au rapport de ΔKEH à l'aire Z, et que le rapport de ΔKEH à l'aire M est inférieur² au rapport de ΔKEH à l'aire Z ; l'aire Z est, par conséquent, supérieure à l'aire Λ , et inférieure à l'aire M.

13.

Soit de nouveau le levier $A\Gamma$, et B son milieu ; soit $K\Delta TP$ un trapèze tel que ses côtés $K\Delta$ et TP soient orientés vers le point Γ , et ses côtés ΔT et KP perpendiculaires à $B\Gamma$; qu'il soit suspendu au levier aux points E et H ; que l'aire Z y soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze ΔKTP dans

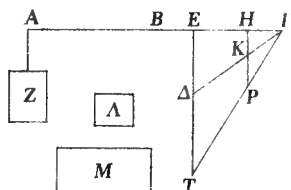


Fig. 71

sa position actuelle ; que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du trapèze ΔKTP à l'aire Λ , et le rapport de AB à BH égal au rapport du même trapèze à l'aire M. On démontrerait comme précédemment que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ , et inférieure à l'aire M.

1. Cf. prop. 6.

2. Cf. Eucl. V, 8.

μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατὰστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Z διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ I τῷ Z κρεμαμένῳ κατὰ τὸ A , τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Z , ὃν
 5 ἂ AB ποτὶ τὰν BI · δῆλον οὖν ὅτι τὸ ΔKEH ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Z , ποτὶ δὲ τὸ M ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Z · ὥστε τὸ Z τοῦ μὲν Λ μείζον ἐστὶ, τοῦ δὲ M ἔλασσον.

ιγ'.

10 Ἐστω πάλιν τὸ μὲν AG ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ B , τὸ δὲ $K\Delta TP$ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν $K\Delta$, TP πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ , τὰς δὲ ΔT , KP καθέτους ἐπὶ τὰν $B\Gamma$, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ E , H , τὸ δὲ Z χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ A καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ
 15 ΔKTP τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν

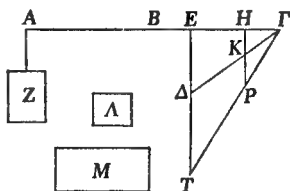


Fig. 71

λόγον ἔχει ἂ AB ποτὶ τὰν BE , τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔKTP τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ AB ποτὶ τὰν BH , τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ M . Ὅμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Z τοῦ μὲν Λ μείζον,
 20 τοῦ δὲ M ἔλασσον.

1 τῷ G : τῷ DEH || 6 Λ mss. \mathcal{Z} : A mss. $DEGH$ || 13 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω $DEGH$ || H mss. $G\mathcal{Z}$: om. DEH || 14 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω $DEGH$.

14.

Soit le segment $B\Theta\Gamma$ compris entre une droite et une parabole. Supposons d'abord $B\Gamma$ perpendiculaire au diamètre. Menons du point B la parallèle $B\Delta$ au diamètre, et du point Γ la droite $\Gamma\Delta$, tangente à la parabole au point Γ ; le triangle $B\Gamma\Delta$ sera donc rectangle¹. Divisons le segment de droite $B\Gamma$ en autant de segments partiels égaux qu'on voudra, soit BE , EZ , ZH , HI , $I\Gamma$. Par les points de division menons les parallèles $E\Sigma$, ZT , HY , $I\Xi$ au diamètre, joignons les points d'intersection de ces parallèles avec la parabole au point Γ , et prolongeons les droites de jonction. Je dis que le triangle $B\Delta\Gamma$ est inférieur au triple de la somme des trapèzes KE , ΛZ , MH , NI et du triangle $\Xi I\Gamma$, et supérieur au triple de la somme des trapèzes $Z\Phi$, $H\Theta$, $I\Pi$ et du triangle $IO\Gamma$.

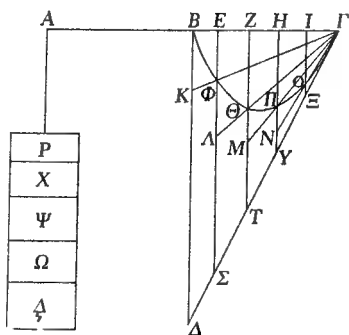


Fig. 72

1. Cf. Eucl. I, 29.

ιδ'.

- Ἐστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Ἐστω δὴ πρῶτον ἃ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου
- 5 ἃ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. Διηρήσθω δὴ ἃ ΒΓ ἐς ἴσα τμᾶματα ὅποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τὰν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ
- 10 τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμί δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἴμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ
- 15 ΙΟΓ τριγώνου μεῖζον [ἐστίν] ἢ τριπλάσιον.

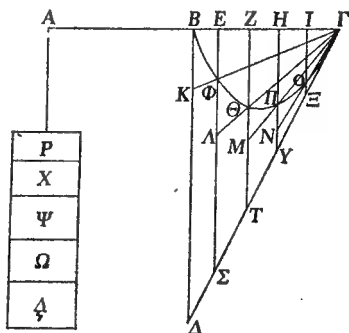


Fig. 72

7 ἴσα Nizzius : τὰ codd. || 8 ΙΓ add. Nizzius || τᾶν τομᾶν Torellius : τᾶς τομᾶς codd. || 11 ἐπὶ Heiberg : κατὰ codd. || 15 ἐστίν DEGH : esse ~~del.~~ Heiberg.

Menons en effet la droite $AB\Gamma$ et prenons sur elle le segment AB égal au segment $B\Gamma$. Imaginons que $A\Gamma$ soit un levier, dont le milieu sera le point B ; que ce levier soit suspendu au point B . Suspendons au levier aussi le triangle $B\Delta\Gamma$ aux points B et Γ , et à l'autre partie du levier, au point A , les aires P , X , Ψ , Ω , Δ . Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE dans la position qu'il occupe, l'aire X au trapèze $Z\Sigma$, l'aire Ψ au trapèze TH , l'aire Ω au trapèze ΥI et, enfin, l'aire Δ au triangle $\Xi I\Gamma$; dès lors, la somme (sc. des aires, ^sd'un côté de B) fera équilibre à la somme (sc. des trapèzes, de l'autre côté de B), de façon que l'aire du triangle $B\Delta\Gamma$ sera triple¹ de la somme des aires P , X , Ψ , Ω , Δ . Puisque, en outre, $B\Gamma\Theta$ est un segment compris entre une droite et une parabole, que la droite $B\Delta$ est menée du point B parallèlement au diamètre, que la droite $\Gamma\Delta$ a été menée du point Γ comme tangente à la parabole au point Γ , et qu'une autre droite, ΣE , est menée parallèlement au diamètre, le rapport de $B\Gamma$ à BE est égal² au rapport de ΣE à $E\Phi$. Il s'ensuit que le rapport de BA à BE est aussi égal³ au rapport du trapèze ΔE au trapèze KE . On démontrera de la même manière que le rapport de AB à BZ est égal au rapport du trapèze ΣZ au trapèze ΛZ , que le rapport de AB à BH est égal au rapport du trapèze TH au trapèze MH , et que le rapport de AB à BI est égal au rapport du trapèze ΥI au trapèze NI . Comme on a donc le trapèze ΔE , ayant ses angles aux sommets B et E droits et les côtés orientés vers le point Γ , qu'une certaine aire P , suspendue au levier au point A , fait équilibre à ce trapèze dans sa position actuelle, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est

1. Cf. prop. 6.

2. Cf. prop. 5.

3. Puisque $BA = B\Gamma$ et $\frac{\Delta E}{KE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$.

Διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἃ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἃ ΑΒ
ἴσα τῇ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ · μέσον δὲ αὐτοῦ
ἑσσεῖται τὸ Β · καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ
τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ δὲ τοῦ θατέρου
5 μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ⁵ χωρία κατὰ
τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ
οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΖ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ,
τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ⁵ τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ · ἰσορροπήσει
δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ · ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ
10 τριγώνον τοῦ ΡΧΨΩΔ⁵ χωρίου. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν τμᾶμα
τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου
κῶνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον
ἄκται ἃ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ
κῶνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἄκται δὲ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν
15 διάμετρον ἃ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ ΒΓ ποτὶ τὰν
ΒΕ, ὃν ἃ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ · ὥστε καὶ ἃ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ
τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ.
Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται ἃ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ τὸν αὐτὸν
ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣΖ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ, ποτὶ δὲ
20 τὰν ΒΗ, ὃν τὸ ΤΗ ποτὶ τὸ ΜΗ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΙ, ὃν τὸ ΥΙ
ποτὶ τὸ ΝΙ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ
τοῖς Β, Ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς
ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ
κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ
25 τραπεζίου ὡς νῦν κείμεναι, καὶ ἔστιν ὡς ἃ ΒΑ ποτὶ τὰν
ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ, μείζον ἄρα

3 κρεμάσθω pr. D : κεκρεμάσθω EGH || κρεμάσθω alt.
Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH || 5 κρεμάσθω Heiberg : κεκρε-
μάσθω DEGH || Δ⁵ Heiberg : Δ codd. || 8 Δ⁵ Heiberg : Δ codd. ||
ΞΙΓ mss. G⁵ : ΖΙΓ mss. DEH || 9 καὶ ΔΕGH : om. \mathcal{Z} || 10
ΡΧΨΩΔ⁵ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. || 19 ἔχουσα G : ἔχοντι
DEH habere \mathcal{Z} || ΛΖ ms. \mathcal{Z} : ΑΖ mss. DEGH || 20 ΒΙ ms. \mathcal{Z} :
ΒΗ mss. DEGH || 23 τὸ alt. ΕΗ : τῷ DG.

à BE, l'aire KE est supérieure à l'aire P ; car cela a été démontré¹. D'autre part, on a aussi le trapèze ZΣ, ayant les angles aux sommets Z et E droits et le côté ΣT orienté vers le point Γ ; l'aire X, suspendue au levier au point A, lui fait équilibre dans sa position actuelle ; enfin, le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ comme AB est à BE, et le trapèze ZΣ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ ; il s'ensuit que l'aire X sera inférieure au trapèze ΛZ et supérieure au trapèze ZΦ ; car cette propriété a été démontrée elle aussi. Pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera inférieure au trapèze MH et supérieure au trapèze ΘH, l'aire Ω inférieure au trapèze NOIH et supérieure au trapèze ΠI, l'aire Δ inférieure au triangle ΕΙΓ et supérieure au triangle ΓΙΟ. Du moment donc que le trapèze KE est supérieur à l'aire P, le trapèze ΛZ supérieur à l'aire X, le trapèze MH supérieur à l'aire Ψ, le trapèze NI supérieur à l'aire Ω, et que le triangle ΕΙΓ est supérieur à l'aire Δ, il est manifeste que la somme des aires indiquées est supérieure à la somme des aires P, X, Ψ, Ω et Δ. Mais cette dernière somme est équivalente à la troisième partie du triangle ΒΓΔ. Il est donc évident que le triangle ΒΓΔ est inférieur à la triple somme des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΕΙΓ. Puisque, d'autre part, le trapèze ZΦ est inférieur à l'aire X, le trapèze ΘH inférieur à l'aire Ψ, le trapèze ΠI inférieur à l'aire Ω, et que le triangle ΙΟΓ est inférieur à l'aire Δ, il est manifeste que la somme des aires indiquées est elle aussi inférieure à la somme des aires Δ, Ω, Ψ, X. Il est donc évident que le triangle ΒΔΓ est aussi supérieur² au triple de la somme des trapèzes

1. Cf. prop. 10.

2. Puisque $\text{B}\Delta\Gamma > 3(\Delta + \Omega + \Psi + X)$.

- ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου : δέδεικται γὰρ τοῦτο. Πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ζ, Ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσιν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ
- 5 Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπέζιου ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΖΦ, ὡς δὲ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΑΖ · εἴη οὖν καὶ τὸ Χ χωρίον τοῦ μὲν ΑΖ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μείζον · δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο.
- 10 Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν ΜΗ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘΗ μείζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν ΝΟΙΗ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠΙ μείζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Δ₅ χωρίον τοῦ μὲν ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓΙΟ μείζον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΚΕ τραπέζιον μείζον
- 15 ἔστι τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΑΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον τοῦ Δ₅, φανερόν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ΡΧΨΩΔ₅ χωρίου. Ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨΩΔ₅ τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ₅ τριγώνου · δηλὸν ἄρα ὅτι τὸ ΒΓΔ₅ τρίγωνον ἔλασσόν
- 20 ἔστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπέζιων καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ Δ₅, φανερόν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ ΔΩΨΧ₅ χωρίου · φανερόν
- 25 οὖν ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον

3 ἔχον G : ἔχων DEH || 5 ἔχοντος τοῦ τραπέζιου ζ : ἔχοντι τῷ τραπέζιῳ DEGH || 8 οὖν καὶ Heiberg : ἀν καὶ codd. || 12 ΝΟΙΗ mss. DEGH : ni ms. ζ || δὲ Heiberg : δὴ codd. || 13 Δ₅ Heiberg : Δ codd. || 16 Δ₅ Heiberg : Δ codd. || 17 ΡΧΨΩΔ₅ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. || 18 ΡΧΨΩΔ₅ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. || ΒΓΔ Nizzius : ΑΓΔ mss. DEGH, b d g ms. ζ || 23 Δ₅ Heiberg : Δ codd. || 24 ΔΩΨΧ ms. D : ΔΩΨΧ mss. ΕΓζ, ΘΩΨΧ ms. Η.

ΦZ , ΘH , III et du triangle $I\Gamma O$, et qu'il est inférieur à la triple somme des aires décrites auparavant.

15.

Soit de nouveau le segment $B\Theta\Gamma$ compris entre une droite et une parabole ; mais que $B\Gamma$ ne soit pas perpendiculaire au diamètre ; nécessairement donc ou bien la parallèle au diamètre menée du point B du côté du segment, ou bien la parallèle menée du point Γ , fait un angle obtus avec $B\Gamma$. Que ce soit la droite issue de B qui fait l'angle obtus ; menons de B la parallèle $B\Delta$ au diamètre, et de Γ la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole au point Γ ; divisons $B\Gamma$ en un nombre quelconque de segments égaux, soit BE , EZ , ZH , HI , $I\Gamma$, menons des points E , Z , H , I parallèlement au diamètre les droites $E\Sigma$, ZT , $H\Upsilon$, $I\Xi$, joignons leurs points d'intersection avec la parabole au point Γ , et prolongeons les droites de jonction. Je dis que, dans ce cas encore, le triangle $B\Delta\Gamma$ est inférieur à la triple somme des trapèzes $B\Phi$, ΛZ , MH , NI et du triangle $\Gamma I\Xi$ et supérieur à la triple somme des trapèzes $Z\Phi$, $H\Theta$, III et du triangle ΓOI .

Prolongeons ΔB de l'autre côté (sc. au-delà du segment). J'abaisse la perpendiculaire ΓK et je prends le segment AK égal à ΓK . Imaginons encore que $A\Gamma$ soit un levier, K son milieu, et que $A\Gamma$ soit suspendu au point K ; suspendons aussi le triangle $\Gamma K\Delta$, dans sa position actuelle, à la moitié du levier, aux points Γ et K , et suspendons à l'autre moitié du levier, au point A , les aires P , X , Ψ , Ω , Δ ; que l'aire P fasse

τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

ιε'.

- Ἔστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας
 5 καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἦτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλείαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ.
 Ἔστω ἃ τὰν ἀμβλείαν ποιούσα ἃ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω
 10 παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἃ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διηρήσθω ἃ ΒΓ εἰς τμᾶματα ἴσα ὅποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων,
 15 καθ' ἃ τέμνοντι αὐταὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμί δὴ καὶ νῦν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μείζον ἢ τριπλάσιον.
 20 Ἐκβεβλήσθω ἃ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. Ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τῇ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. Νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ
 25 θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ,

6 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 7 ἀγμέναν GB : ἀγμένων DEH || αὐτὰ G^z : om. DEH || 9 ποτὶ τῷ DEH^z : πρὸς τὸ G || 12 τὰ Heiberg : τᾶν DEGH om. ^z || 15 ἃ G : δ DEH ubi ^z || ἐπεξεύχθωσαν G : ἐπιζεύχθωσαν DEH || 17 τῶν μὲν EGH : τῷ μὲν D || ΜΗ, ΝΙ ms. ^z : ΘΗ, ΠΙ mss. DEGH || 20 οὖν add. Heiberg || 23 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH || 24 καὶ add. Heiberg || 25 τὰ G : τῶν DEH.

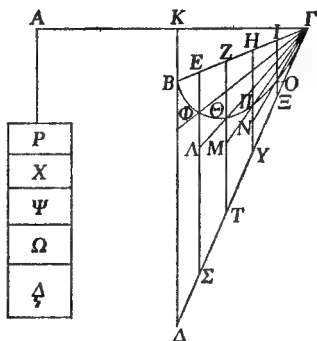


Fig. 73

équilibre au trapèze ΔE dans sa position actuelle, l'aire X au trapèze $Z\Sigma$, l'aire Ψ au trapèze TH , l'aire Ω au trapèze ΥI , et l'aire Δ au triangle $\Gamma I \Xi$; la somme des aires (sc. d'un côté) fera donc équilibre à la somme des aires (sc. de l'autre côté); il s'ensuit que le triangle $\Delta B \Gamma$ est équivalent¹ à la triple somme des aires P , X , Ψ , Ω , Δ . Nous démontrerons de la même manière que dans la proposition précédente² que le trapèze $B\Phi$ est supérieur à l'aire P , que l'aire X est comprise entre les (sc. aires des) trapèzes $Z\Phi$ et ΘE , l'aire Ψ comprise entre les trapèzes $H\Theta$ et MH , l'aire Ω comprise entre les trapèzes ΠI et NI , et que l'aire Δ est comprise entre le triangle $\Gamma I O$ et le triangle $\Xi I \Gamma$ ³; la proposition est donc démontrée.

16.

Soit de nouveau le segment $B\Theta \Gamma$ compris entre une droite et une parabole. Menons par le point B

1. Cf. prop. 7.

2. Cf. prop. 14.

3. On a ainsi les inégalités : $B\Phi > P$; $Z\Phi < X < \Theta E$; $H\Theta < \Psi < MH$; $\Pi I < \Omega < NI$; $\Gamma I O < \Delta < \Xi I \Gamma$.

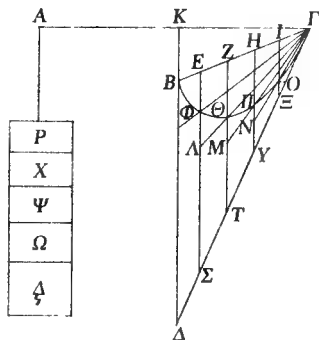


Fig. 73

Χ, Ψ, Ω, Δ χωρία, καὶ τὸ μὲν P τῷ ΔΕ τραπεζίῳ ἰσορρο-
 πείτω οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ,
 τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ ·
 ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ · ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ
 5 ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ χωρίου. Ὅμοίως
 δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ
 Ρ χωρίου μείζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μείζον ἐὼν τοῦ
 Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον
 μείζον ἐὼν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ
 10 μὲν ΝΙ τραπέζιον μείζον ἐὼν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ
 ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μείζον τοῦ Δ χωρίου,
 τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον · δηλὸν οὖν ἐστίν.

1ζ'.

Ἐστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας
 15 καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β

1 Δ ms. G : Δ mss. DEH χ || τὸ EGH : τῷ D || 3 τὸ sec. EG :
 τῷ DH || Δ mss. DG : Δ mss. E χ , Θ ms. H || 4 δὴ χ : δὲ DEGH ||
 5 PXΨΩΔ Heiberg : OXΨΩΔ mss. DEGH, r q ψ ω d ms. χ ||
 7 P ms. χ : PX mss. DEGH || 11 Δ ms. G : Δ mss. DEH χ .

la parallèle $B\Delta$ au diamètre, et du point Γ la droite $\Gamma\Delta$, tangente à la parabole au point Γ . Soit l'aire Z équivalente à la troisième partie du triangle $B\Delta\Gamma$. Je dis que le segment $B\Theta\Gamma$ est équivalent à l'aire Z .

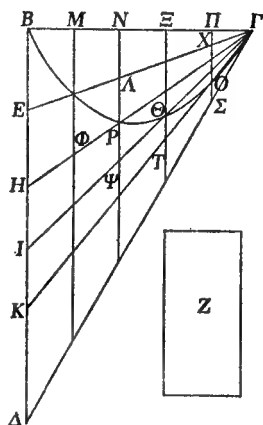


Fig. 74

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est ou bien plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord, si possible, plus grand. L'excès du segment $\text{BO}\Gamma$ sur l'aire Z , ajouté à lui-même (sc. un nombre suffisant de fois), sera donc supérieur au triangle $\text{B}\Gamma\Delta$. Mais il est possible de se donner une aire, inférieure à cet excès, qui soit une partie du triangle $\text{B}\Delta\Gamma$. Soit donc le triangle $\text{B}\Gamma\text{E}$; qu'il soit inférieur à l'excès en question, et qu'il soit une partie du triangle $\text{B}\Delta\Gamma$; le segment de droite BE sera alors la même partie¹ du segment de droite BD . Divisons donc ce segment en parties (sc. égales à BE), et soit H , I , K les points de division; menons les droites joignant les points H , I , K au point Γ . Ces

1. Cf. Eucl. VI, 1.

droites coupent la parabole, puisque $\Gamma\Delta$ est la tangente à la parabole au point Γ . Par les points où ces droites coupent la parabole menons les droites $M\Phi$, NP , $\Xi\Theta$, ΠO parallèlement au diamètre; elles seront aussi parallèles¹ à $B\Delta$. Puisque maintenant le triangle $B\Gamma E$ est inférieur à l'excès du segment $B\Theta\Gamma$ sur l'aire Z , il est évident que la somme de l'aire Z et du triangle $B\Gamma E$ est inférieure au segment. De plus, la somme des trapèzes ME , $\Phi\Lambda$, ΘP , ΘO et du triangle $\Gamma O\Sigma$, à travers lesquels la parabole passe, est équivalente au triangle $B\Gamma E$; le trapèze ME est en effet commun, le trapèze $M\Lambda$ est équivalent au trapèze $\Phi\Lambda$, le trapèze $\Lambda\Xi$ au trapèze ΘP , le trapèze $X\Xi$ au trapèze ΘO , et le triangle $\Gamma X\Pi$ au triangle $\Gamma O\Sigma$; l'aire Z sera donc inférieure à la somme des trapèzes $M\Lambda$, ΞP , $\Pi\Theta$ et du triangle $\Pi O\Gamma$. Or le triangle $B\Delta\Gamma$ est équivalent au triple de l'aire Z . Il s'ensuit que le triangle $B\Delta\Gamma$ est inférieur à la triple somme des trapèzes $M\Lambda$, ΞP , $\Theta\Pi$ et du triangle $\Pi O\Gamma$, ce qui est impossible du moment qu'on a démontré² qu'il est supérieur au triple (sc. de cette somme). Le segment $B\Theta\Gamma$ n'est donc pas supérieur à l'aire Z .

Je dis qu'il ne lui est pas, non plus, inférieur. Qu'il soit en effet, si possible, inférieur à Z . De nouveau donc l'excès de l'aire Z sur le segment $B\Theta\Gamma$, ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, dépassera³ aussi le triangle $B\Delta\Gamma$. Mais il est possible de se donner une aire inférieure à cet excès et qui soit une partie du triangle $B\Delta\Gamma$. Que le triangle $B\Gamma E$ soit inférieur à cet excès et qu'il soit une partie du triangle $B\Delta\Gamma$; répétons les constructions de la première partie de cette proposition. Puisque, dans ces conditions, le triangle $B\Gamma E$ est inférieur à l'excès de l'aire Z sur

1. Cf. Eucl. I, 30.

2. Cf. prop. 14 et 15.

3. Cf. l'Introd. à Dosithée, milieu.

- ἐπὶ τὸ Γ εὐθείαι ἐπεζεύχθωσαν · τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἂ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτὰς κατὰ τὸ Γ · καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομάν αἱ εὐθείαι, ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, 5 ΞΘ, ΠΟ · ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ξ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. Καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά 10 ἐντι, δι' ὧν ἂ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον · τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ · τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, 15 ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. Καὶ ἐστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου · τὸ δὲ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου · ὅπερ ἀδύνατον · ἐδείχθη γὰρ μείζον ἐὼν ἢ τριπλάσιον. Οὐκοῦν οὐ μείζον ἐστι τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ 20 Ζ χωρίου.

- Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν ἄρα ἂ ὑπεροχά, ξ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Δυνατὸν δὲ ἐστι λαβεῖν χωρίον 25 ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἢ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἔστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς

1 ἐπὶ τὸ Γ Heiberg : ἐπὶ τὰ ΓΕ mss. DEGH apud g ms. ζ || εὐθεῖαι G : εὐθεῖα DEH || 3 καθ' ἃ Heiberg : om. DEGH ubi ζ || 5 ΠΟ Torellius : ΠΣ codd. || 7 ΒΘΓ ms. ζ : ΒΘΙ mss. DEGH || 11 ΘΡ, ΘΟ mss. DEGH : rt ts ms. ζ || 13 ΟΘ mss. DEGH : ts ms. ζ || 22 ἄρα add. Heiberg.

le segment $B\Theta\Gamma$, la somme du triangle $B\epsilon\Gamma$ et du segment $B\Theta\Gamma$ est inférieure à l'aire Z . Mais l'aire Z est aussi inférieure à la somme des quadrilatères EM , ΦN , ΨE , ΠT et du triangle $\Gamma\Pi\Sigma$; car le triangle $B\Delta\Gamma$ est équivalent au triple de l'aire Z , et il est inférieur à la triple somme des aires indiquées, comme nous l'avons démontré dans la proposition précédente¹. Il s'ensuit que la somme du triangle $B\Gamma E$ et du segment $B\Theta\Gamma$ est inférieure à la somme des quadrilatères EM , ΦN , $\Xi\Psi$, ΠT et du triangle $\Gamma\Pi\Sigma$. Par conséquent, si on retranche de part et d'autre le segment, le triangle ΓBE serait lui aussi inférieur à la somme des aires restantes, ce qui est impossible du moment qu'on a démontré que le triangle $B\epsilon\Gamma$ est équivalent à la somme des trapèzes EM , $\Phi\Lambda$, ΘP , ΘO et du triangle $\Gamma O\Sigma$, et que cette somme est supérieure à la somme des aires restantes.

Le segment $B\Theta\Gamma$ n'est donc pas inférieur à l'aire Z ; mais on a démontré qu'il ne lui est pas non plus supérieur. Le segment est donc équivalent à l'aire Z .

17.

Cette propriété démontrée, il est évident que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base que le segment et même hauteur.

Soit, en effet, un segment compris entre une droite et une parabole; soit Θ son sommet; inscrivons dans ce segment le triangle $B\Theta\Gamma$ ayant même base que le segment et une hauteur égale (sc. à celle du segment). Puisque Θ est le sommet du segment², la droite menée de Θ parallèlement au diamètre coupe $B\Gamma$ en deux parties égales, et $B\Gamma$ est parallèle à la tangente au segment au point Θ ³. Menons la parallèle $E\Theta$ au dia-

1. Plutôt dans les deux propositions 14 et 15, dans le texte actuel.

2. Cf. la définition du sommet, de la base, et de la hauteur du segment de parabole, et plus généralement d'un segment compris entre une droite et une courbe, à la fin de cette prop. 17.

3. Cf. prop. 1.

- ὑπεροχᾶς, ἧ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα ἀμφοτέρω ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἑλάσσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου ·
- 5 ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἑλάσσον ἢ τριπλάσιον, ὥς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη · ἑλάσσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. Ὡστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος
- 10 ἑλάσσον εἶη καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον · ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὶν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἃ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. Οὐκ ἄρα ἑλάσσον τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου.
- 15 Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζον · ἴσον ἄρα τὸ τμήμα τῷ Ζ χωρίῳ.

ιζ'.

- Τούτου δεδειγμένου φανερόν ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτρίτον
- 20 ἐστὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον.

- Ἔστω γὰρ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ
- 25 τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Θ σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος, ἃ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἃ ΒΓ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιπαύουσιν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. Ἀχθῶ δὲ ἃ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀχθῶ

10 κα Heiberg : ἀν G om. DEHζ || 12 ΘΡ mss. DEGH
rt ms. ζ || 18 τούτου DEGH : hoc autem ζ.

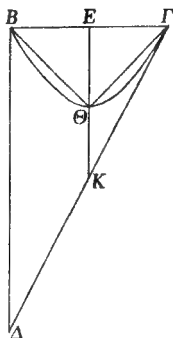


Fig. 75

δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἃ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. Ἐπεὶ οὖν ἃ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν, ἃ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἃ δὲ ΕΓ παράλληλός
 5 ἐστὶ τῇ ἐπιψαυούσῃ τὰς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τριγώνον τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τριγώνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμήματος τριπλάσιόν ἐστὶ, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δηλὸν ὡς ἐπίτρίτον ἐστὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου.

10 Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεΐαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἃ μέγιστα κάθετος ἄγεται.

15

ιη'.

Εἴ κα ἐν τμήματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεΐα

9 τμήμα χ : om. DEGH \parallel BΘΓ alt. ms. χ : ΒΔΓ mss. DEGH \parallel 13 ἀγομέναν χ : ἀπτομέναν DEH.

au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle menée au diamètre coupe la section conique¹.

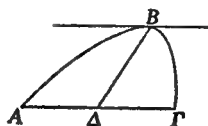


Fig. 76

Soit, en effet, $AB\Gamma$ un segment compris entre une droite et une parabole. Menons du milieu de $A\Gamma$ la parallèle ΔB au diamètre. Du moment donc que $B\Delta$ est mené parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les segments $A\Delta$ et $\Delta\Gamma$ sont égaux, il est évident que $A\Gamma$ et la tangente à la conique au point B sont parallèles². Il est donc manifeste que de toutes les perpendiculaires abaissées de (sc. points situés sur) la conique sur $A\Gamma$ la plus grande sera celle qui est abaissée du point B ; le point B est donc le sommet du segment.

19.

Dans un segment compris entre une droite et une parabole la droite menée du milieu de la base (sc. parallèlement au diamètre) a une longueur égale aux quatre tiers de celle de la droite menée (sc. parallèlement au diamètre) du milieu de la moitié de la base.

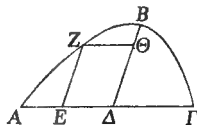


Fig. 77

1. Cf. Apollonius, I, déf. 4.

2. Cf. prop. 1.

Soit $AB\Gamma$ un segment compris entre une droite et une parabole ; menons du milieu de $A\Gamma$ la parallèle $B\Delta$ au diamètre, et du milieu de $A\Delta$ la parallèle EZ ; menons, de plus, la parallèle $Z\Theta$ à $A\Gamma$. Du moment donc que dans une parabole $B\Delta$ est mené parallèlement au diamètre, et que les droites $A\Delta$ et $Z\Theta$ sont parallèles à la tangente en B , il est évident que le rapport de $B\Delta$ à $B\Theta$ est égal¹ au rapport du carré sur $A\Delta$ au carré sur $Z\Theta$; il s'ensuit que le segment de droite $B\Delta$ a une longueur quadruple² de celle de $B\Theta$. Il est donc évident que la longueur de $B\Delta$ est égale aux quatre tiers de celle de EZ .

20.

Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole un triangle ayant même base que le segment et même hauteur, le triangle inscrit sera supérieur à la moitié du segment.

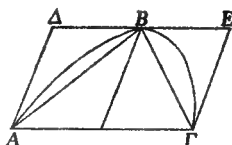


Fig. 78

Soit $AB\Gamma$ un tel segment ; inscrivons-y le triangle $AB\Gamma$ ayant la même base que le segment entier et la même hauteur. Du moment donc que le triangle a même base et même hauteur que le segment, le point B est nécessairement³ le sommet du segment ; $A\Gamma$ est donc parallèle à la tangente⁴ à la conique au point B . Faisons passer

1. Cf. prop. 3.

2. Puisque $A\Delta = 2Z\Theta$.

3. Cf. prop. 17, déf. de la fin.

4. Cf. prop. 1 ; 17 ; 18.

Ἐστω γὰρ τὸ $AB\Gamma$ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας
καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον
ἃ μὲν BD ἀπὸ μέσας τᾶς AG , ἃ δὲ EZ ἀπὸ μέσας τᾶς AD ,
ἄχθω δὲ καὶ ἃ $Z\Theta$ παρὰ AG . Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου
5 κώνου τομᾷ ἃ BD παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, καὶ αἱ
 AD , $Z\Theta$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ B ἐπιψαύουσάν ἐντι, δηλὸν
ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ BD ποτὶ τὰν $B\Theta$ μάκει, ὃν ἃ
 AD ποτὶ τὰν $Z\Theta$ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἃ
 BD τᾶς $B\Theta$ μάκει. Φανερόν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστὶν ἃ
10 BD τᾶς EZ μάκει.

κ'.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ
ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν
βάσιν ἔχον τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μείζον ἐσσεῖται
15 τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον ἢ ἡμισυ τοῦ τμᾶματος.

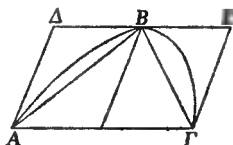


Fig. 78

Ἐστω γὰρ τὸ $AB\Gamma$ τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράψθω
εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ
ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμᾶματι
τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ
20 B σημεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμᾶματος· παράλληλος
ἄρα ἐστὶν ἃ AG τᾷ κατὰ τὸ B ἐπιψαυούσῃ τᾶς τομᾶς.

■ κατὰ τὸ B mss. $DEGH$: om. $\propto \parallel$ ἐντι \propto : αἱ μὲν τι
 $DEGH \parallel$ 7 τὸν αὐτὸν G : τὰν αὐτὰν $\propto DEH \parallel$ ἔχει \propto : ἔχοντι
 $DEGH$.

par B la parallèle ΔE à $A\Gamma$, et par A et Γ les parallèles $A\Delta$ et ΓE au diamètre ; ces droites tomberont donc en dehors du segment¹. Dès lors, comme le triangle $AB\Gamma$ est la moitié² du parallélogramme $A\Delta E\Gamma$, il est évident qu'il est supérieur à la moitié du segment.

COROLLAIRE

Ceci démontré, il est évident qu'il est possible d'inscrire dans ce segment un polygone tel que les segments restants soient inférieurs à toute aire donnée ; car en retranchant toujours une aire qui, en vertu de cette proposition, est supérieure à la moitié (sc. du segment), il est évident qu'en continuant ainsi à diminuer les segments restants (sc. il arrivera un moment où) nous les rendrons inférieurs à toute aire donnée³.

21.

Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si on inscrit dans les segments restants d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des deux triangles inscrits dans les segments qui restent.

Soit $AB\Gamma$ un segment tel que nous venons de l'indiquer ; que le segment de droite $A\Gamma$ soit divisé en deux parties égales par le point Δ ; que la droite $B\Delta$ soit menée parallèlement au diamètre ; le point B est ainsi le sommet du segment⁴, et le triangle $AB\Gamma$

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.* 16.

2. Cf. Eucl. I, 41.

3. Cf. Eucl. X, 1.

4. Cf. prop. 18.

Ἄχθω ἃ ΔΕ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ παρὰ τὰν διάμετρον ὅτι πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμήματος. Ἐπεὶ οὖν ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΔΕΓ παραλληλογράμμου, φανερόν ὅτι μεῖζόν
5 ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δεδειγμένου δὲ τούτου δήλον ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμήμα δυνατόν ἐστὶ πολὺγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος
10 χωρίου ὅτι ἀφαιρουμένου γὰρ αἰ μεῖζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν ὅτι ἐλασσοῦντες αἰ τὰ λειπόμενα τμήματα ποιήσομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κα'.

15 Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐκατέρου τῶν
20 τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμήμα ἐγγραφέν.

Ἐστω τὸ ΑΒΓ τμήμα οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἃ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἃ δὲ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ὅτι
25 Β ἄρα σαμείον κορυφὰ ἐστὶν τοῦ τμήματος. Τὸ ἄρα ΑΒΓ

1 ΔΕ mss. DEGH : ze ms. ζ || τῶν Basil. : τᾶν DEGH || 2 ΑΔ mss. DEGH : az ms. ζ || 4 ΑΔΕΓ mss. DEGH : azeg ms. ζ || 7 δεδειγμένου δὲ τούτου ζ : δεδειγμένου DEH τούτου δεδειγμένου G || 8-9 περιλειπόμενα Gζ : περιπόμενα D περιεπόμενα EH.

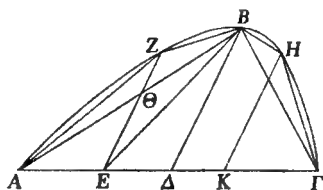


Fig. 79

a même base et même hauteur que le segment. Divisons de nouveau $A\Delta$ en deux parties égales par le point E et menons la parallèle EZ au diamètre ; soit Θ le point d'intersection de AB (sc. et de EZ). Le point Z est donc le sommet¹ du segment AZB , et par conséquent le triangle AZB a même base et même hauteur que le segment AZB . Il faut démontrer que le triangle $AB\Gamma$ est équivalent à l'octuple du triangle AZB .

Le segment de droite $B\Delta$ est donc égal² aux quatre tiers de EZ et au double de $E\Theta$. Le segment $E\Theta$ est donc égal au double de ΘZ , de façon que le triangle AEB est aussi double du triangle ZBA ; car le triangle $AE\Theta$ est double du triangle $A\Theta Z$, et le triangle ΘBE est double³ du triangle $Z\Theta B$. Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ est égal à l'octuple du triangle AZB ; on démontrera de la même manière qu'il est octuple aussi du triangle inscrit dans le segment $BH\Gamma$.

22.

Étant donné un segment compris entre une droite et une parabole, si des aires en nombre quelconque sont disposées en une suite de raison (sc. géométrique) quatre, la plus grande de ces aires étant équivalente au triangle qui a même base et même hauteur que le segment, la somme de toutes ces aires sera inférieure à l'aire du segment.

1. Cf. Eucl. I, 30 ; VI, 2 ; et prop. 18.

2. Cf. prop. 19.

3. Cf. Eucl. VI, 1.

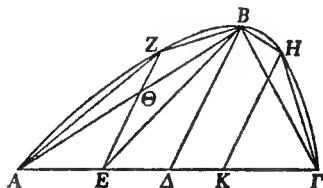


Fig. 79

τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πάλιν τετμάσθω δίχα ἡ AD τῷ E , καὶ ἄχθω ἡ EZ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω AB κατὰ τὸ Θ · τὸ ἄρα Z σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος τοῦ AZB . Τὸ δὴ AZB τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ $[AZB]$ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τοῦ AZB τριγώνου.

Ἐστὶν οὖν ἡ BD τῆς μὲν EZ ἐπίτριτος, τῆς δὲ $E\Theta$ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῆς ΘZ . Ὡστε καὶ τὸ AEB τρίγωνον διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ZBA · τὸ μὲν γὰρ $AE\Theta$ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ $A\Theta Z$, τὸ δὲ ΘBE τοῦ $Z\Theta B$. Ὡστε τὸ $AB\Gamma$ τοῦ AZB ἐστὶν ὀκταπλάσιον. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ $BH\Gamma$ τμήμα ἐγγραφέντος.

κβ'.

Εἴ καὶ τὸ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἐξῆς ὅποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλάσιονι λόγῳ, τὴν δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος.

3 Θ mss. $DEGH$: t in duo equa \propto || 5 τῷ GH : τὸ DE || AZB alt. mss. $DEGH$ om. \propto del. Heiberg || 13 τμήμα Heiberg : τμήμα $G\propto$ τμήματος DEH .

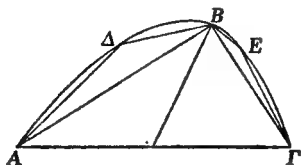


Fig. 80

Soit, en effet, le segment $A\Delta BE\Gamma$ compris entre une droite et une parabole ; soit les aires Z, H, Θ, I , en nombre quelconque, disposées en une suite de manière que celle qui précède soit quadruple de celle qui suit ; que l'aire la plus grande soit Z , et que Z soit équivalent au triangle ayant même base et même hauteur que le segment. Je dis que le segment est supérieur à la somme des aires Z, H, Θ, I .

Soit B le sommet du segment entier, Δ et E les sommets des segments restants. Puisque le triangle $AB\Gamma$ est équivalent à l'octuple¹ de chacun des triangles $A\Delta B$ et $BE\Gamma$, il est évident qu'il est équivalent au quadruple de la somme de ces deux triangles. Puisque, de plus, le triangle $AB\Gamma$ est équivalent à l'aire Z , de leur côté les triangles $A\Delta B$ et $BE\Gamma$ sont équivalents, pour les mêmes raisons, à l'aire H . On

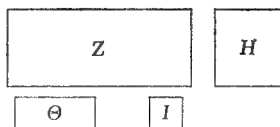


Fig. 81

démontrera de la même manière que les triangles inscrits dans les segments restants et qui ont même base et même hauteur que les segments sont équivalents à

1. Cf. prop. 21.

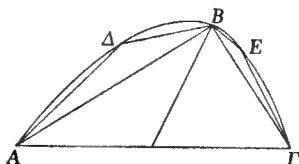


Fig. 80

Ἐστω γάρ τμᾶμα τὸ **ΑΔΒΕΓ** περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὅποσαοῦν ἐξῆς κείμενα τὰ **Ζ, Η, Θ, Ι**, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω 5 τὸ **Ζ**, καὶ ἔστω τὸ **Ζ** ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν **Ζ, Η, Θ, Ι** χωρίων μείζον ἔστιν.

Ἐστω τοῦ μὲν ὅλου τμᾶματος κορυφὰ τὸ **Β**, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ **Δ, Ε**. Ἐπεὶ οὖν τὸ **ΑΒΓ** 10 τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν **ΑΔΒ, ΒΕΓ** τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. Καὶ ἐπεὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ **Ζ** χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ **ΑΔΒ, ΒΕΓ** τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ

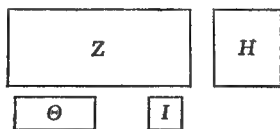


Fig. 81

Η χωρίῳ. Ὅμοιως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περι- 15 λειπόμενα τμᾶματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ

11 ὅτι ὡς $DEG : \omega$ ὡς H quod \propto || 13 ταῦτα δὴ Heiberg : τὰ αὐτὰ δὲ codd. || 16 ἴσα ἐντὶ $G\propto$: ἴσων ὄντων DEH .

l'aire Θ , et que les triangles inscrits (sc. de la même façon) dans les segments apparaissant à la suite (sc. de cette opération) sont équivalents à l'aire I . Il s'ensuit que la somme des aires proposées sera équivalente à un polygone inscrit dans le segment. Il est donc manifeste que cette somme est inférieure à l'aire du segment.

23.

Si des grandeurs sont disposées en une suite de raison quatre¹, la somme de ces grandeurs augmentée du tiers de la plus petite sera égale aux quatre tiers de la plus grande².

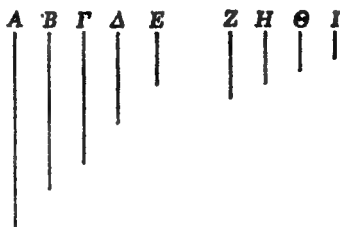


Fig. 82

Soit A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, disposées en une suite (sc. décroissante), chacune étant le quadruple de la suivante. Soit A la plus grande, Z le tiers de B , H le tiers de Γ , Θ le tiers de Δ , I le tiers de E . Du moment que Z est le tiers de B , et que B est le quart de A , la somme de B et de Z est égale à la troisième partie de A . Pour les mêmes raisons, la somme de H et de Γ est égale à la troisième partie de B , la somme de Θ et de Δ égale à la troisième partie de Γ , la somme de I et de E égale à la troisième partie de Δ . Il s'ensuit que la somme de $B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I$ est égale à la troisième partie de la somme de A, B, Γ, Δ . Mais la somme de Z, H, Θ

τῷ ■ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἔσσονται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμήμα. Φανερόν οὖν ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμήματος.

5

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἐξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἔσσονται τοῦ μεγίστου.



Fig. 82

- 10 Ἐστω οὖν ὅποσαοῦν μεγέθεα ἐξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν,
- 15 ἀμφότερα τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἐντὶ δὲ καὶ

1 τὰ ἐς Heiberg : ἐς DEGH || 2 I mss. GB : $\frac{1}{4}$ DEH || 4 ἐλάσσονά $\frac{1}{4}$: ἐλασσον DEGH || 6 τεθέωντι Heiberg : συντεθέωντι codd. || 11 τετραπλασίονα DEGH : τετραπλάσιον $\frac{1}{4}$ || 17 Η, Θ, Ι mss. G $\frac{1}{4}$: Ε, Θ, Γ mss. DEH || 18 Δ Torellius : Δ, Ε codd.

est aussi égale à la troisième partie de la somme de B, Γ, Δ ; par conséquent, la somme de B, Γ, Δ, E, I qui reste (sc. si on retranche de la somme, entière, de $B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I$ la somme, partielle, de Z, H, Θ) est égale à la troisième partie de la grandeur A qui reste (sc. si on retranche du tiers de la somme de A, B, Γ, Δ le tiers de la somme de B, Γ, Δ). Il est donc évident que la somme de A, B, Γ, Δ, E , augmentée de I , c'est-à-dire du tiers de E , est égale aux quatre tiers de A .

24.

Tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

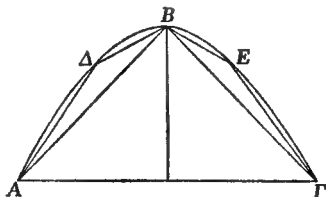


Fig. 83

Soit le segment $A\Delta BE\Gamma$ compris entre une droite et une parabole, et le triangle $AB\Gamma$ ayant même base et même hauteur que ce segment. Soit K une aire équivalente aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$. Il faut démontrer que K est équivalent au segment $A\Delta BE\Gamma$.

Si K n'est pas équivalent au segment, K est ou bien supérieur ou bien inférieur à ce segment. Que le segment $A\Delta BE\Gamma$ soit d'abord, si possible, supérieur à l'aire K . Or nous avons inscrit (sc. dans le segment) les triangles $A\Delta B$ et $BE\Gamma$ comme cela a été indiqué, et nous avons aussi inscrit, dans les segments restants, d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, et nous continuons à inscrire dans les segments apparaissant successivement des triangles ayant même base et même hauteur que ces segments. Les

αὐτὰ τὰ Z, H, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν B, Γ, Δ · καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ B, Γ, Δ, E, I τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ A . Δῆλον οὖν ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ A, B, Γ, Δ, E καὶ τὸ I , τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ E , τοῦ A ἐστὶν ἐπίτριτα.

5

κδ'.

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

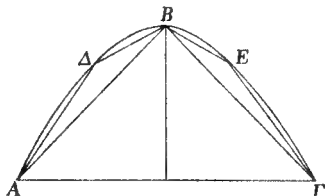


Fig. 83

Ἐστω γὰρ τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας
10 καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἔστω
τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμᾶματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ
 $AB\Gamma$ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ K χωρίον. Δεικτέον ὅτι
ἴσον ἐστὶ τῷ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶματι.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον.
15 Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα
τοῦ K χωρίου. Ἐνέγραψα δὴ τὰ $A\Delta B, BE\Gamma$ τρίγωνα,
ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμᾶματα
ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν
καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμᾶματα
20 ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς
τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ κατα-

13 τῷ $EG : \tau\acute{o} DH$.

segments restants finiront, dès lors, par être inférieurs¹ à l'excès du segment $A\Delta BE\Gamma$ sur l'aire K . Il s'ensuit que le polygone inscrit sera supérieur à l'aire K , ce qui est impossible. Nous avons, en effet, ici des aires disposées en une suite de raison quatre, d'abord le triangle $AB\Gamma$, quadruple² de la somme des triangles $A\Delta B$ et $BE\Gamma$, ces derniers quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi de suite. Il est donc évident que la somme de toutes ces aires est inférieure aux quatre tiers de la plus grande³; mais (sc. par hypothèse) l'aire K est équivalente aux quatre tiers de la plus grande aire (sc. du triangle $AB\Gamma$). Le segment $A\Delta BE\Gamma$ n'est donc pas supérieur à l'aire K .

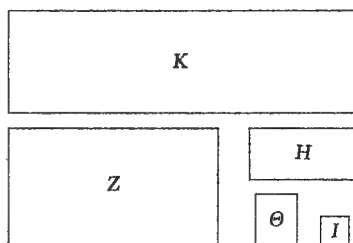


Fig. 84

Qu'il soit, si possible, inférieur à K . Donnons-nous dès lors une aire Z équivalente au triangle $AB\Gamma$, une aire H équivalente au quart de Z , une aire Θ équivalente au quart de H , et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dernière aire soit devenue inférieure à l'excès de l'aire K sur le segment⁴. Soit I cette plus petite aire. La somme des aires Z, H, Θ, I , augmentée du tiers de l'aire I , est donc équivalente aux quatre tiers de l'aire Z . Mais l'aire K est elle aussi équivalente aux quatre tiers de Z . L'aire K est donc équivalente à

1. Cf. prop. 20, coroll.

2. Cf. prop. 21.

3. Cf. prop. 23.

4. Cf. Eucl. X, 1.

- λειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾷς ὑπεροχᾷς, ᾧ ὑπερέχει
 τὸ **ΑΔΒΕΓ** τμήμα τοῦ **Κ** χωρίου. Ὡστε τὸ ἐγγραφόμενον
 πολύγωνον μείζον ἐσσεῖται τοῦ **Κ**· ὅπερ ἀδύνατον.
 Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἐξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλάσιον
 5 λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν
ΑΔΒ, **ΒΕΓ** τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια
 τῶν εἰς τὰ ἐπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ αἰεὶ οὕτω,
 δηλὸν ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα
 τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ **Κ** ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου.
 10 Οὐκ ἄρα ἐστὶν μείζον τὸ **ΑΔΒΕΓ** τμήμα τοῦ **Κ** χωρίου.

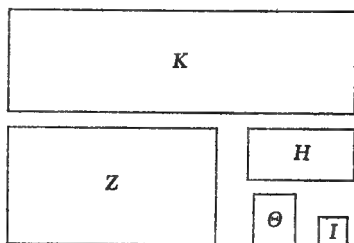


Fig. 84

- Ἐστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Κείσθω δὴ τὸ μὲν
ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ **Ζ**, τοῦ δὲ **Ζ** τέταρτον τὸ **Η**, καὶ
 ὁμοίως τοῦ **Η** τὸ **Θ**, καὶ αἰεὶ ἐξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται
 τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾷς ὑπεροχᾷς, ᾧ ὑπερέχει τὸ **Κ**
 15 χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ **Ι**· ἔστιν
 δὴ τὰ **Ζ**, **Η**, **Θ**, **Ι** χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ **Ι** ἐπίτριτα τοῦ **Ζ**.
 Ἐστὶν δὲ καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Ζ** ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ **Κ** τοῖς
Ζ, **Η**, **Θ**, **Ι** καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ **Ι**. Ἐπεὶ οὖν τὸ **Κ** χωρίον

4 γάρ add. Heiberg || 5 τρίγωνον **DEGH** : om. \mathcal{L} || 6 δὲ **DEGH** : om. \mathcal{L} || αὐτὰ ταῦτα Heiberg : τὰ αὐτὰ **DEGH** ipsa \mathcal{L} || 13 ἕως κα γένηται Heiberg : ὥστε καταγένηται **DEGH** ut flat \mathcal{L} || 16 δὴ Heiberg : δὲ codd.

la somme des aires Z , H , Θ , I augmentée du tiers de l'aire I . Du moment donc que l'aire K dépasse la somme des aires Z , H , Θ , I d'une aire inférieure à I , et qu'elle dépasse le segment d'une aire supérieure à I , il est évident que la somme des aires Z , H , Θ , I est supérieure au segment, ce qui est impossible ; car il a été démontré que, si dans une suite d'aires, en nombre quelconque et de raison quatre, la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, la somme de toutes ces aires est inférieure au segment¹. Il s'ensuit que le segment $A\Delta BE\Gamma$ n'est pas inférieur à l'aire K . Mais on a démontré qu'il ne lui est pas non plus supérieur. Il est donc équivalent à l'aire K . Mais l'aire K est équivalente aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$. Par conséquent, le segment $A\Delta BE\Gamma$ est lui aussi équivalent aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$.

1. Cf. prop. 22.

τῶν μὲν Z, H, Θ, I χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ I, τοῦ
 δὲ τμάματος μείζονι τοῦ I, δηλον ὡς μείζονά ἐντι τὰ Z, H,
 Θ, I χωρία τοῦ τμάματος · ὅπερ ἀδύνατον · ἐδείχθη γὰρ
 ὅτι, ἐὰν ᾗ ὅποσαοῦν χωρία ἐξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι
 5 λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾗ τῷ εἰς τὸ τμάμα ἐγγραφομένῳ
 τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ
 τμάματος. Οὐκ ἄρα τὸ ΑΔΒΕΓ τμάμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ
 K χωρίου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζον · ἴσον ἄρα ἐστὶν
 τῷ K. Τὸ δὲ K χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ
 10 ΑΒΓ · καὶ τὸ ΑΔΒΕΓ ἄρα τμάμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ
 τριγώνου.

1 τῶν GH : τῷ DE || 4 ἐὰν DEGH : om. ζ || 10 ἄρα ζ :
 om. DEGH.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Page 9.

3. Cf. *ibid.*, II, 1.
4. Cf. *ibid.*, II, 4.
5. Cf. *ibid.*, II, 3.
6. Cf. *ibid.*, II, 5.
7. Cf. *ibid.*, II, 6.
8. Cf. *ibid.*, II, 7.

Page 13.

1. Il s'agit donc de l'aire d'un triangle mixtiligne limité par un arc de cercle, un arc de spirale et un segment de droite ; cf. la figure de la prop. 28.

2. Cf. prop. 28.

3. Le « postulat d'Archimède » qui suit est énoncé dans le traité *De la sphère et du cylindre*, I, post. 5 et dans la lettre à Dosithée qui introduit *La quadrature de la parabole*.

Page 23.

1. Cf. p. 17, n. 2.
2. Cf. Eucl. III, 35.
3. Cf. Eucl. VI, 4 et V, 18.

Page 25.

2. En d'autres termes :

$$\Theta (A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = \Theta (A+3B+5\Gamma+7\Delta+9E+11Z+13H+15\Theta).$$

3. C'est-à-dire :

$$A^2 = \Theta [A + (B+\Gamma) + (\Gamma+K) + (\Delta+\Lambda) + (E+M) + (Z+N) + (H+\Xi) + (\Theta+O)] = \Theta \cdot 8A = \frac{A}{8} \cdot 8A.$$

Page 26.

1. A savoir : $A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta).$

2. On ■ d'après la proposition 10

$$A^2 > \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta),$$

d'où

$$2 A^2 > A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta);$$

« ce qui est ajouté », à savoir $A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$, est donc inférieur à $2A^2$. En remplaçant donc dans la relation de plus haut

$$(1) S_1 + A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3 S_2,$$

où S_1 et S_2 désignent la première et la seconde somme, $A^2 + \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$ par $2A^2$, cette relation devient

$$(2) S_1 + 2A^2 > 3 S_2, \quad \text{d'où}$$

$$S_1 > 3 S_2 - 2A^2 > 3 S_2 - 3A^2 = 3 (S_2 - A^2).$$

Page 29.

1. De la suite d'égalités

$$\frac{\overline{AB}^2}{AB \cdot \Phi B + \frac{1}{3} \overline{A\Phi}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{OA \cdot \Delta X + \frac{1}{3} \overline{XO}^2} = \frac{\overline{\Pi Z}^2}{\Pi Z \cdot \Psi Z + \frac{1}{3} \overline{\Psi \Pi}^2} = \dots,$$

Archimède déduit, avec l'hypothèse sous-entendue $\Delta X = \Psi Z = \Omega \Theta = K\lambda = M\varsigma = N\xi$, et l'hypothèse explicite $OA = OX + XD$, $\Pi Z = \Pi\Psi + \Psi Z$, etc., la relation

$$\frac{\overline{OA}^2 + \overline{\Pi Z}^2 + \overline{P\Theta}^2 + \overline{\Sigma K}^2 + \overline{TM}^2 + \overline{\Upsilon \Xi}^2}{N\xi (OA + \Pi Z + P\Theta + \Sigma K + TM + \Upsilon \Xi) + \frac{1}{3} (\overline{OX}^2 + \overline{\Pi \Psi}^2 + \overline{P\Omega}^2 + \overline{\Sigma \lambda}^2 + \overline{T\varsigma}^2 + \overline{\Upsilon N}^2)} = \frac{\overline{AB}^2}{AB \cdot \Phi B + \frac{1}{3} \overline{A\Phi}^2}$$

Page 38.

1. C'est-à-dire supérieur à l'angle compris entre la droite AA et l'arc ΔTP qui, lui, est supérieur à tout angle aigu rectiligne, cf. Eucl. III, 16; d'autre part, cet angle étant contenu dans l'angle AAZ , ce dernier angle ne saurait être aigu.

Page 42.

3. Cf. Eucl. III, 7.

4. Puisque, par hypothèse, $AA < AZ$, on a : $\frac{\Theta A}{AA} > \frac{\Theta A}{AZ}$, d'où

$$\text{l'on déduit : } \frac{\Theta A}{AA} > \frac{\frac{1}{2} \Theta H}{\text{perp. de } A \text{ sur } \Theta H}.$$

5. Cf. prop. 7.

6. On a en effet : $\frac{NP}{\Theta A} = \frac{\Theta P}{AA}$, cf. Eucl. V, 16, et $\Theta A = PA$.

7. Cf. prop. 15.

Page 43.

1. Cf. prop. 4.
2. Cf. Eucl. III, 16, coroll.
3. Cf. prop. 8.
4. Cf. Eucl. V, 16.

Page 47.

1. Puisque l'angle $\Delta\Delta Z$ est aigu ; cf. prop. 16.
2. Cf. prop. 4.
3. Cf. prop. 7.
4. Puisque $\Delta A = AP$; cf. Eucl. V, 16.

Page 62.

4. Cf. prop. 11, coroll.
5. Cf. milieu de cette prop. 25.
6. Cf. Eucl. V, 10.

Page 69.

3. Cf. prop. 24.
4. Cf. 25, coroll.
5. Cf. Eucl. XII, 2.
6. Cf. Eucl. V, 22.
7. Du moment que $\Gamma\Theta = 3\Theta A$, $\Theta B = 2\Theta A$, $\Gamma B = AB = \Theta A$,

$$\text{on a : } \frac{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3} \overline{\Gamma B}^2}{B\Theta \cdot \Theta A + \frac{1}{3} \overline{AB}^2} = \frac{6 \overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3} \overline{\Theta A}^2}{2 \overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3} \overline{\Theta A}^2} = \frac{19 \overline{\Theta A}^2}{7 \overline{\Theta A}^2} = \frac{19}{7}.$$

8. Cf. Eucl. V, 17.
9. Cf. Eucl. V, 22.

Page 71.

1. Du moment que

$$\frac{N}{K + \Lambda + M} = \frac{\Theta \Gamma \cdot B\Delta}{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3} \overline{\Gamma B}^2}, \quad \text{on aura}$$

$$\frac{K + \Lambda + M}{N} = \frac{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3} \overline{\Gamma B}^2}{\Theta \Gamma \cdot B\Delta}$$

$$\text{et } \frac{K + \Lambda + M + N}{N} = \frac{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3} \overline{\Gamma B}^2 + \Theta \Gamma \cdot B\Delta}{\Theta \Gamma \cdot B\Delta}$$

$$\text{et } \frac{N}{K + \Lambda + M + N} = \frac{\Theta\Gamma \cdot B\Delta}{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3} \overline{\Gamma B}^2 + \Theta\Gamma \cdot B\Delta};$$

cf. Eucl. V, 7, coroll. et V, 18. Les mots « et inversement » sont l'addition superflue d'un copiste.

2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. Bien qu'elle soit vraie pour toute spirale, Archimède ne démontre cette proposition que pour la spirale décrite dans une seule révolution. Heiberg pense, pour cette raison, que le mot *ὅποιον* n'est pas d'Archimède lui-même; cf. *Archimedis Opera*, II, p. 117.

Page 73.

$$2. \text{ On a, d'après Eucl. V, 7, coroll., } \frac{H\Gamma\Theta}{N + \Pi} = \frac{\overline{H\Theta}^2}{H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3} \overline{A\Theta}^2};$$

de cette relation on déduit, d'après Eucl. V, 17, la relation

$$\frac{\Xi}{N + \Pi} = \frac{\overline{H\Theta}^2 - (H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3} \overline{A\Theta}^2)}{H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3} \overline{A\Theta}^2}; \text{ mais d'après Eucl. II, 4,}$$

$$\begin{aligned} \overline{H\Theta}^2 - (H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3} \overline{A\Theta}^2) &= \overline{H\Lambda}^2 + \overline{A\Theta}^2 + 2 H\Lambda \cdot A\Theta - H\Lambda \cdot A\Theta \\ &- \overline{A\Theta}^2 - \frac{1}{3} \overline{A\Theta}^2 = H\Lambda \cdot A\Theta + \frac{2}{3} \overline{H\Lambda}^2. \end{aligned}$$

Page 81.

1. Cf. *De la sph. et du cyl.*, I, déf. 2.

2. Cf. post. 3.

3. Sc. de l'absurdité qui précède.

4. Cf. post. 1.

5. Cf. post. 2.

Page 89.

2. Il manque ici plusieurs chaînons dans le raisonnement, à savoir : « mais, par hypothèse, le point Γ marque déjà dans le segment EZ une division telle que les segments partiels aient entre eux le rapport inverse de celui des grandeurs ; il ne saurait donc marquer la même division aussi dans le segment E Θ . » Pour combler la lacune, dont on ignore l'origine, Heiberg propose d'insérer, entre *μεγέθεισιν* et *ὥστε*, la phrase : *τὸ δὲ Γ ἐπὶ τῆς EZ ἐστὶ τμηθεῖσας, ὥστε τὰ τμήματα ἀντιπεπονημένον τοῖς μεγέθεισιν.*

Page 90.

1. Cf. post. 4.
2. Cf. prop. 5, coroll. 2.
3. Puisque EK est inférieur à IO, par hypothèse.

Page 92.

2. Cf. prop. 4.
3. Cette définition est rejetée, comme addition d'un copiste, par Barrowius et par Heiberg.
4. Conditions de similitude des triangles ABΓ et ΔEZ ; cf. Eucl. VI, 4.

Page 94.

5. Cf. Eucl. V, 17 et 22.
6. Sc. après soustraction de l'angle BAΘ de l'angle BAH, et de l'angle EΔN de l'angle EΔM ; cf. Eucl. I, Not. comm. 3.
7. Sc. après soustraction de la somme des angles ABΘ, BΓΘ, ΘΓH, HAΘ, ΘAB de la somme des angles du triangle ABΓ, et soustraction de la somme des angles ΔEN, EZN, NZM, MΔN, NΔE de la somme des angles du triangle ΔEZ.

Page 97.

1. Les quatre mots du texte *τούτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος* sont condamnés par Heiberg comme une interpolation tirée du commentaire d'Eutocius ; cf. Heiberg, *Archim. Opera*, II, p. 155.
2. Puisque $\frac{A\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$; cf. Eucl. VI, 2.
3. Λ est le point homologue de Θ d'après la prop. 11.
4. Cf. Eucl. I, 29.

Page 98.

3. Du moment que $\frac{BE}{EA} = \frac{\Gamma Z}{AZ}$, on a $\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda\Theta} = \frac{BK}{K\Theta}$; cf. Eucl. VI, 2.
4. Cf. prop. 10.
5. Les droites MN, ZΛ et AΘ sont en effet parallèles, puisque EM = MZ et KN = NA.
6. Cf. *La Quadr. de la parab.*, prop. 6.

Page 100.

1. Cf. prop. 13.
2. Cf. prop. 8.
3. Cf. prop. 14.

4. Cf. prop. 6 et 7.

5. Cf. Eucl. VI, 1.

6. A cause de la similitude des triangles $OPII$ et $\Sigma\Pi E$; cf. Eucl. VI, 4.

7. On a en effet : $EP = P\Sigma = \Sigma Z$, puisque $AN = NA = BA$, et que les droites NT , ΛM et $B\Gamma$ sont parallèles.

8. Il faut compléter la démonstration par la conclusion :

$$\frac{2 B\Gamma + A\Delta}{2 A\Delta + B\Gamma} \text{ est donc égal à } \frac{\Pi E}{\Pi Z}.$$

Page 102.

1. En faisant l'addition des deux égalités $E\Theta = ZK$ et $E\Lambda = Z\Theta$,

$$\begin{aligned} E\Theta &= ZK \\ E\Lambda &= Z\Theta \\ \Lambda\Theta &= K\Theta \end{aligned}$$

on trouve en effet $\Lambda\Theta = K\Theta$

2. Cf. Eucl. V, 15.

Page 105.

1. Comme les segments BN , NM , MA , $\Lambda\Delta$, d'une part, $O\varsigma$, $\varsigma\lambda$, $\lambda\Omega$, ΩP , d'autre part, sont dans le rapport des nombres impairs 1, 3, 5, 7, les segments BN , BM , BA , $B\Delta$, d'une part, $O\varsigma$, $O\lambda$, $O\Omega$, OP , d'autre part, sont dans le rapport des nombres carrés 1, 4, 9, 16. Mais, en vertu d'une propriété de la parabole (cf. *Quadr. parab.* 3), les carrés sur les segments HN , ZM , $E\Lambda$, $A\Delta$ sont entre eux comme les segments BN , BM , BA , $B\Delta$, et les carrés sur les segments $X\varsigma$, $Y\lambda$, $\Sigma\Omega$, ΞP sont entre eux comme les segments $O\varsigma$, $O\lambda$, $O\Omega$, OP . Les rapports des segments BN , BM , BA , $B\Delta$ étant égaux aux rapports des segments $O\varsigma$, $O\lambda$, $O\Omega$, OP , les rapports des carrés sur HN , ZM , $E\Lambda$, $A\Delta$ sont égaux aux rapports des carrés sur $X\varsigma$, $Y\lambda$, $\Sigma\Omega$, ΞP , d'où l'on déduit l'égalité des rapports de $2HN$, $2ZM$, etc. et des rapports de $2X\varsigma$, $2Y\lambda$, etc., c'est-à-dire des rapports de $H\Theta$, ZI , EK , $A\Gamma$ et des rapports de $X\Psi$, $Y\Phi$, ΣT , $\Xi\Pi$.

2. Puisque, d'après I, 15, la place des centres de gravité dépend du rapport des côtés AI , EK , $\Xi\Pi$, ZT .

3. Cf. I, 14.

Page 111.

1. Puisque la figure $AKBA\Gamma$ est supérieure au triangle $AB\Gamma$ et que la somme des segments restants est inférieure à l'aire X .

2. Cf. Eucl. V, 8.

Page 116.

1. En d'autres termes :

a, b, c, d étant quatre segments tels que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, si on se donne deux segments λ et μ tels que :

$$\frac{\lambda}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{d}{a-d}; \text{ et } \frac{\mu}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d},$$

on a : $\lambda + \mu = \frac{2}{5}a$.

Page 120.

4. Ce long raisonnement est fondé sur les propositions relatives aux grandeurs proportionnelles contenues dans Eucl. V et VI. L'écriture algébrique rend la démonstration plus aisée et plus brève. On trouvera des démonstrations concises dans Sturm, *op. laud.* p. 273, dans Nizze, *op. laud.*, p. 38, et, plus récemment, dans P. Ver Eecke, *op. laud.*, t. I, p. 344. Heiberg, t. III, p. v, a traduit en langage algébrique la démonstration de ce théorème donnée par Σ .

Page 142.

3. On a en effet : $\frac{\text{périmètre du pol. de 656 côtés}}{\Theta K} < \frac{44}{7}$, d'où

$$\frac{\text{côté du polyg. de 656 c.}}{\Theta K} < \frac{44}{656.7} = \frac{44}{4592} = \frac{11}{1148}; \text{ puisque}$$

$$AB < \text{côté du polyg. de 656 côtés}, \frac{AB}{\Theta K} < \frac{11}{1148}; \frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{104 + \frac{4}{11}};$$

donc à plus forte raison $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{100}$; $AB < \frac{1}{100} \Theta K$.

Page 192.

1. Sur cette proposition cf. E. Stamatis, Γενίκευσις ἐνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους, Πλάτων, t. XV, 1963, fasc. 29 et 30, p. 165-168.

2. Cf. Eucl. IX, 35.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.....	VII
SIGLA.....	VIII
Des Spirales.....	1
De l'Équilibre des Figures Planes.....	75
L'Arénaire.....	127
La Quadrature de la Parabole.....	159
NOTES COMPLÉMENTAIRES.....	197